Matematica generale - teoria

Le matrici

Definizioni

- *matrice*

La matrice è un insieme di elementi disposti su m righe e n colonne. Il generico elemento della matrice A di ordine m x n è detto a_{ij}. Se m è uguale a n, la matrice è quadrata.

$$\underset{1\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}} = \underset{1\times1}{\begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}}$$

- *matrici omogenee*

Due matrici si dicono omogenee se hanno la stessa dimensione

$$\underset{1\times3}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{1\times2}{\begin{bmatrix} 17 & 14 \end{bmatrix}}$$

- *matrici uguali*

Due matrici si dicono uguali se sono omogenee e hanno tutti gli elementi al loro interno uguali

- *matrici comformabili*

Due matrici si dicono conformabili se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda. Due matrici devono esser conformabili per calcolarne il prodotto.

$$\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}}$$

- *matrice nulla*

Tutti i suoi elementi sono uguali a zero

- *matrice identità*

È una matrice quadrata composta da tutti 1 sulla diagonale principale

- *matrice diagonale*

E' una matrice quadrata composta da elementi nulli, eccetto che sulla diagonale principale

-matrice simmetrica

E' una matrice quadrata tale che i suoi elementi siano simmetrici rispetto alla diagonale principale

-matrice trasposta

Data una matrice $A_{m \times n}$, la sua trasposta $A^t_{n \times m}$ si ottiene scambiando di posto le righe con le colonne di A

- *vettore*

E' una matrice composta di una sola riga o di una sola colonna

Operazioni con le matrici.

Somma:

Date due matrici omogenee (stesse dimensioni) A e B, la loro matrice somma A + B si ottiene sommando gli elementi corrispondenti. ($a_{11} + b_{11} \ldots a_{ij} + b_{ij}$).
Valgono la proprietà commutativa (A+ B = B+A) e associativa (A+ B + C = [A+B] + C)
Per la differenza si procede nello stesso modo.

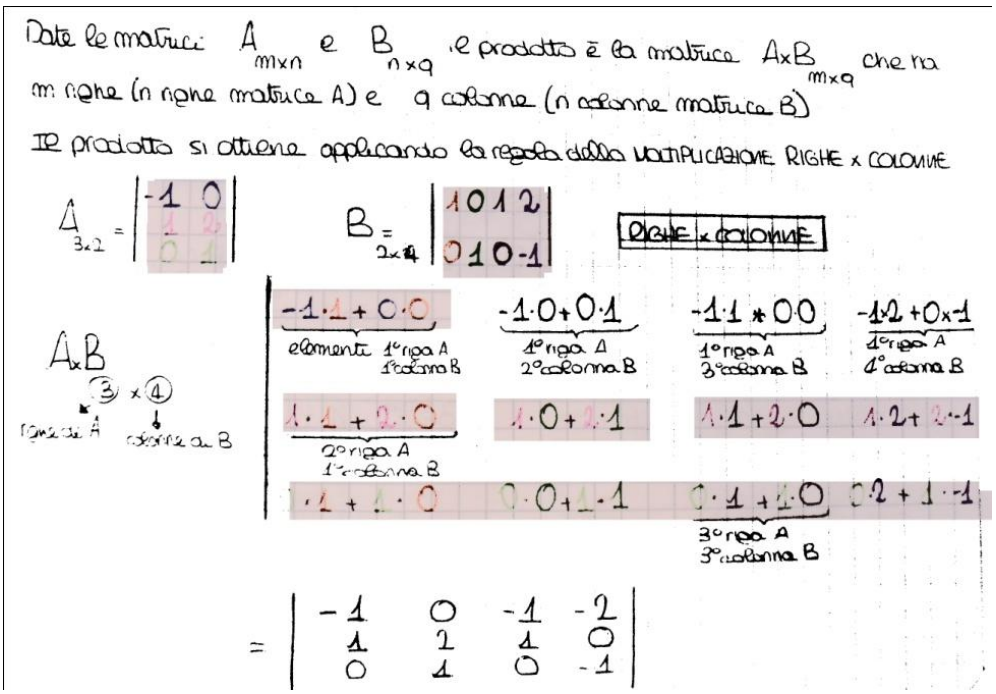
Prodotto:

Per uno scalare

Moltiplico ogni elemento della matrice per lo scalare K (un numero)

Matrice per matrice

Date due matrici conformabili (le colonne di A sono pari alle righe di B) si procede applicando la regola della moltiplicazione righe per colonne: moltiplico tutti gli elementi della prima riga di A(sono tanti quanto il n di colonne di A) con gli elementi della prima colonna di B (tanti quanti il n di righe di b) → ecco perché le matrici devono essere conformabili.



vettore per vettore

- vettore riga * vettore colonna → Ottengo uno scalare (numero)

- vettore colonna * vettore riga → ottengo una matrice con tante righe quante quelle del vettore colonna e tante colonne quante quelle del vettore riga

Definizione di determinante e proprietà.

Il determinante è un numero univocamente associato a una matrice quadrata.

Proprietà:

- Data una matrice di un unico elemento, il suo determinante è quell'elemento.
- Data la matrice identità, il suo determinate è 1.
- se la matrice ha una riga o una colonna di zeri, il determinante è zero.
- se la matrice ha due righe o due colonne uguali o proporzionali, o una riga/colonna che è correlazione lineare di almeno altre 2, il determinante è zero.

Calcolo:

- determinante di matrice 2x 2 → $a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{21}$
- determinante matrice 3x3 → scrivo all'esterno la 1° e 2° colonna. Faccio il prodotto degli elementi sulla diagonale principale e lo sommo al prodotto degli elementi sulle 2 diagonali parallele. Calcolo il prodotto dei valori sulla diagonale secondaria e lo sommo ai prodotti degli elementi delle diagonali sulle altre 2 diagonali parallele. **La differenza tra questi 2 valori è il determinante**
- determinante matrice quadrata con Laplace → calcolo il complemento algebrico (determinante della sottomatrice tolti la riga e la colonna in cui l'elemento di cui calcolo il complemento algebrico si trova.) Ripeto quest'operazione per una riga/colonna della matrice: conviene scegliere la riga/colonna con più zeri. **Il determinante è dato dalla somma dei prodotti di ciascun elemento della riga/colonna scelta per il proprio complemento algebrico.**

- Definizione di Rango

Il rango è l'ordine della sottomatrice quadrata di ordine massimo estraibile dalla matrice con determinante diverso da zero.

- matrice inversa: definizione e calcolo

La matrice inversa di una matrice quadrata è quella matrice tale che moltiplicata (non importa in che ordine, è l'unico caso in cui vale la proprietà commutativa) per la matrice di partenza, restituisce una matrice identità. Una matrice è invertibile se ha determinante diverso da 0.

$A_m^{-1} = \frac{1}{(\det A)} \times A^*$

Matrice aggiunta: è la matrice trasposta della matrice contenente tutti i complementi algebrici di A. La matrice inversa si può calcolare anche con la Pivotizzazione (vedi dopo).

-Definizione e Classificazione dei sistemi lineari

Un sistema lineare può essere visto come un prodotto di matrici.

A_m x **n** * **X** = **B**

equazioni — incognite — vettore delle incognite di n righe — vettore dei termini noti, di m righe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Con riferimento al vettore B dei termini noti, un sistema può essere:

- omogeneo: il vettore B è nullo (tutti zeri)
- non omogeneo: il vettore B non è nullo

Con riferimento all'insieme delle soluzioni un sistema può essere:

- Possibile → determinato (= una sola soluzione) o indeterminato (= infinite soluzioni)
- impossibile → nessuna soluzione

N.B. I sistemi omogenei sono sempre possibili

Un sistema è quadrato quando la matrice A dei coefficienti è quadrata, ovvero quando ci sono tante equazioni quante incognite.

- Discussione dei sistemi con Ruchez- Capelli

La discussione dei sistemi con Ruchez-Capelli, permette di discuterne a priori la soluzione.
Ogni sistema può essere visto come una matrice A dei coefficienti, che moltiplica un vettore X delle incognite restituendo un vettore di termini noti B.
Confrontando il rango di A, con il rango della matrice A | B (affianco alla matrice A il vettore dei termini noti B) si può affermare che

- se il rango di A è uguale al rango di A | B ed è uguale al n di incognite il sistema è determinato
- se il rango di A è uguale al rango di A | B ma è minore al n di incognite il sistema è indeterminato
- se il rango di A è diverso dal rango di A | B il sistema è impossibile.

- Risoluzione con Cramer

Solo per sistemi quadrati e determinati.
La soluzione del sistema è la matrice

$$\underline{x}^* \begin{bmatrix} \frac{\det A_1}{\det A} \\ \frac{\det A_2}{\det A} \\ \frac{\det A_i}{\det A} \end{bmatrix}$$

A_i è la matrice che si ottiene sostituendo alla i-esima colonna di A il vettore $\underline{b}$ dei termini noti
(la matrice A ha tante colonne quante incognite: 1° colonna → 1° incognita, ecc.)

- Risoluzione con Pivotizzazione

Il metodo del pivot consente di risolvere qualsiasi sistema lineare (s.l) possibile: sia esso determinato o indeterminato; permette di determinare se un sistema lineare è impossibile.

Calcolo dell'inversa con Pivotizzazione

Affianco alla matrice quadrata una matrice identità di ordine opportuno.
Comincio con le trasformazioni di pivotizzazione fino a quando non ottengo a sinistra una matrice identità e a destra la matrice inversa. Se non ottengo la matrice identità, la matrice A non è invertibile.

ALGEBRA LINEARE
Risoluzione dei sistemi lineari con il metodo del pivot di Gauss-Jordan

Il metodo del pivot consente di risolvere qualsiasi sistema lineare (s.l) possibile: sia esso determinato o indeterminato; permette di determinare se un s.l è impossibile. Infine, può essere applicato per calcolare l'inversa di una matrice quadrata non singolare.
Si presenta tale metodo attraverso il seguente esempio.
Es. Sia dato il s.l

$$\begin{cases} x+2y+z & =1 \\ 2x+3y-2z & =-1 \\ -x+2y+3z & =-1 \\ 3x+5y-z & =0 \end{cases}$$

Determinarne, se esistono, le soluzioni, utilizzando il metodo del pivot.
Il procedimento di risoluzione del s.l dato per mezzo del metodo del pivot, è articolato in diversi punti.
1- Scrivere il s.l in forma matriciale: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2- Considerare la matrice $A|b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vale la seguente **regola**: si possono spostare le righe della matrice $A|b$.
3- Mettere come prima riga quella il cui primo elemento è$\neq 0$; se esiste, scegliere quella il cui primo elemento è$= 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'elemento a_{11} è il **pivot**, cioè il cardine, della prima riga.
4- Dividere la prima riga per il pivot, e considerare gli elementi della prima colonna, cambiati di segno.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad -a_{21} = -2;\ -a_{31} = 1;\ -a_{41} = -3$$

5- Effettuare le seguenti trasformazioni:
- moltiplicare la prima riga per l'elemento $-a_{21}$ e sommare la prima riga così trasformata alla seconda riga: sostituire il risultato nella seconda riga.
- moltiplicare la prima riga per l'elemento $-a_{31}$ e sommare la prima riga così trasformata alla terza riga: sostituire il risultato nella seconda riga.
...
- moltiplicare la prima riga per l'elemento $-a_{m1}$ e sommare la prima riga così trasformata alla m-riga: sostituire il risultato nella m-riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

6-Ripetere i passaggi dal **3-** al **5-**, al fine di trasformare la seconda colonna.
Si considera il secondo elemento della seconda riga della matrice trasformata: a'_{22}.
Se $a'_{22} \neq 0 \longrightarrow$ sarà il pivot della seconda riga. Si effettuano le trasformazioni di riga descritte al punto **5-** su tutte le righe (compresa la prima).
Se $a'_{22} = 0$, si possono avere due casi:
- vi è almeno un coefficiente a'_{i2} (escluso a'_{12}) diverso da zero. Allora basta scambiare la relativa riga con la seconda e procedere come prima;
- tutti i coefficienti a'_{i2} (eccetto il primo) sono nulli. Allora si passa alla terza colonna e si prosegue con lo stesso criterio.
Nel caso in esame:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad -a_{12} = -2;\ -a_{32} = -4;\ -a_{42} = 1$$

Effettuando le trasformazioni di riga si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vale la seguente **regola**: se si ottiene una riga di zeri, la si elimina; se si ottiene una riga del tipo $[0\,0\,0\,..0|k]$ si può concludere che il s.l dato è *impossibile*.
7- Ripetere i passaggi dal **3-** al **5-**, utilizzando come pivot il terzo elemento della terza riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad -a_{13} = 7;\ -a_{23} = -4$$

Effettuando le trasformazioni di riga si ottiene la matrice

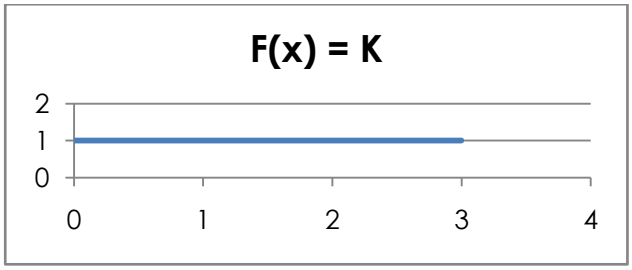
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vale la seguente **regola**: il procedimento di pivotizzazione termina quando viene applicato a tutte le righe della matrice.
Si può concludere che:
Quando si trasforma la sottomatrice di sinistra in una matrice quadrata, i cui elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1 $\Rightarrow$ il s.l di partenza è *determinato*: i valori delle incognite si leggono nella colonna dei termini noti.
Quando si trasforma la sottomatrice di sinistra in una matrice rettangolare con più colonne che righe $\Rightarrow$ il s.l di partenza è *indeterminato*.
Con riferimento all'esempio proposto, si conclude che il s.l dato è *determinato*.
La soluzione del sistema dato si ottiene passando dalla matrice (dopo la pivotizzazione) al sistema:

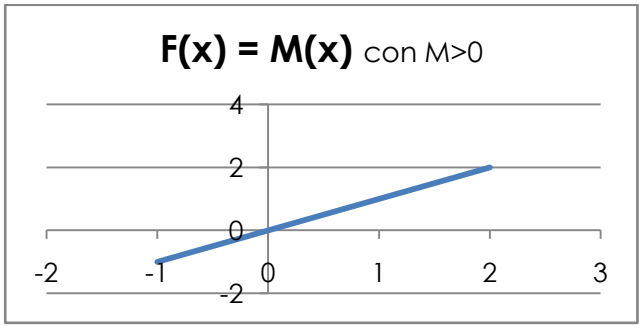
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

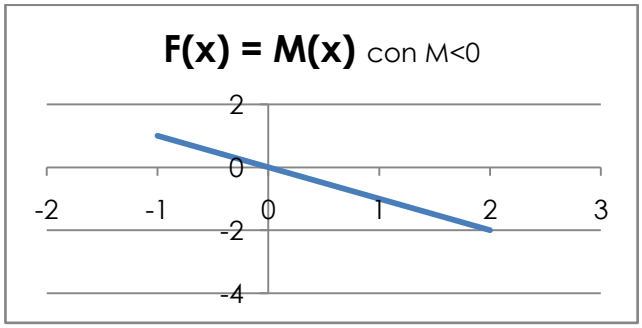
Quindi, nell'esempio proposto, l'unica soluzione del s.l dato è il vettore $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

FUNZIONE COSTANTE

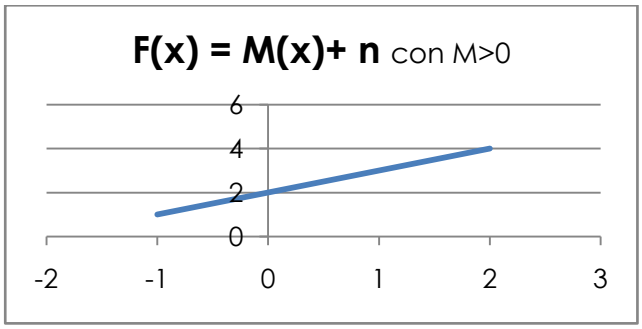


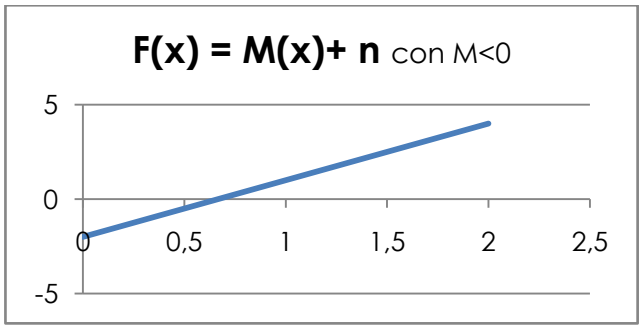
FUNZIONE LINEARE





FUNZIONE LINEARE AFFINE





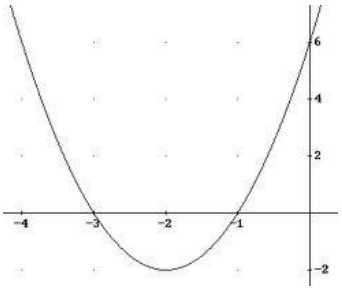
FUNZIONE QUADRATICA

$F(X) = ax^2+bx+c$

a > 0

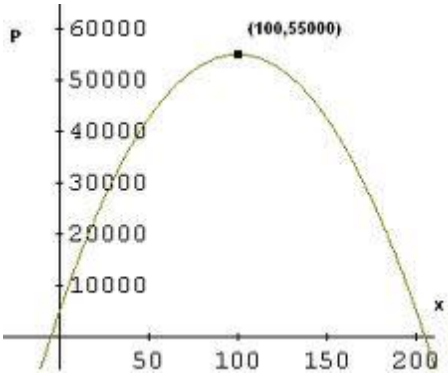
concavità
verso l'alto,
è una parabola

vertice in
x = -b/2a

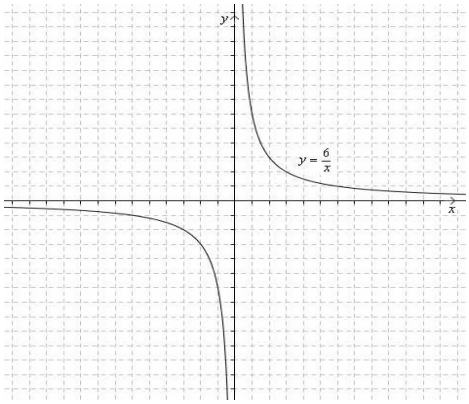


a < 0

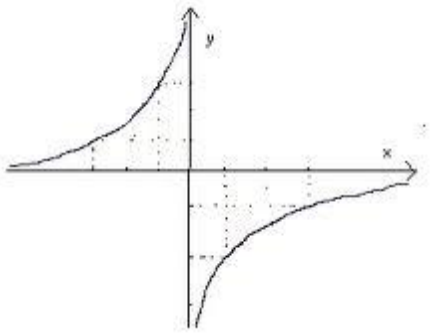
concavità
verso il basso



FUNZIONE A PROPORZIONALITA' INVERSA F(x)=k/x

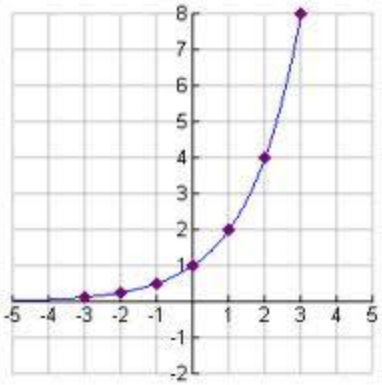


→K >0

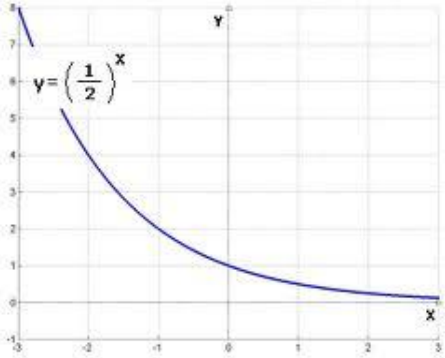


→ K<0

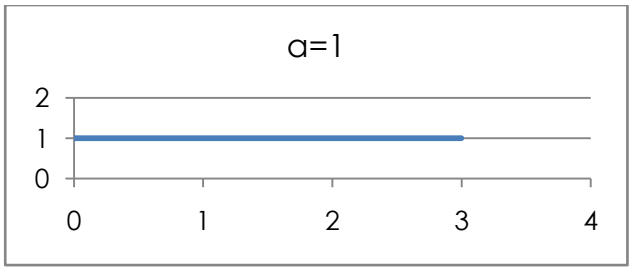
FUNZIONE ESPONENZIALE F(x)= a ^{x}



→ a>1



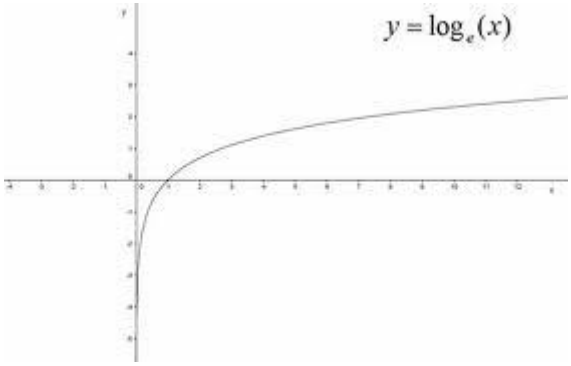
→ a<1

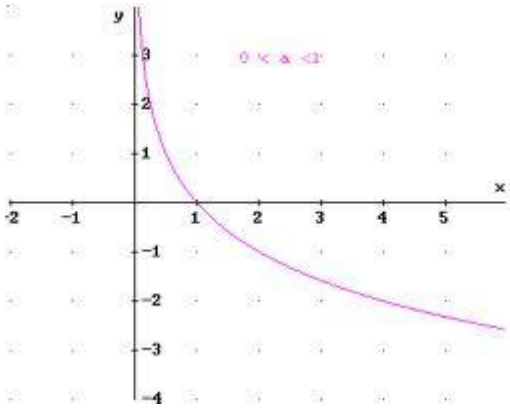


Passa sempre per 0,1; non è mai negativa (Y>0)

FUNZIONE LOGARITMICA F(x)= $\log_a x$

a>1

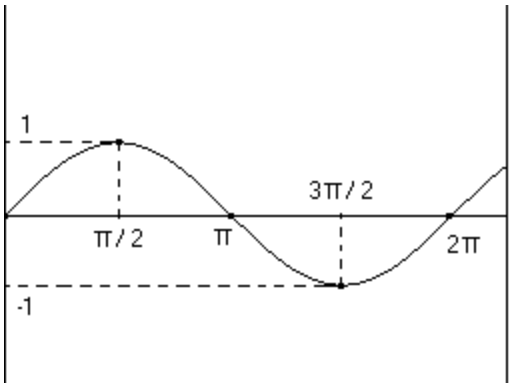




Passa sempre per 1,0; X è sempre positiva

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

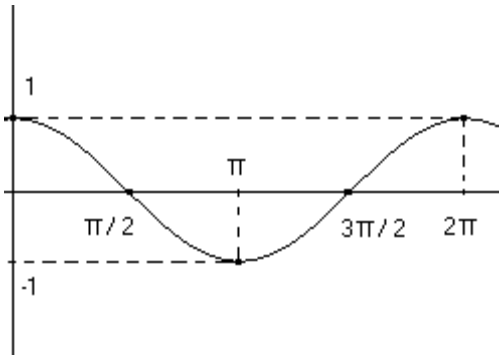
F(x) = sin x



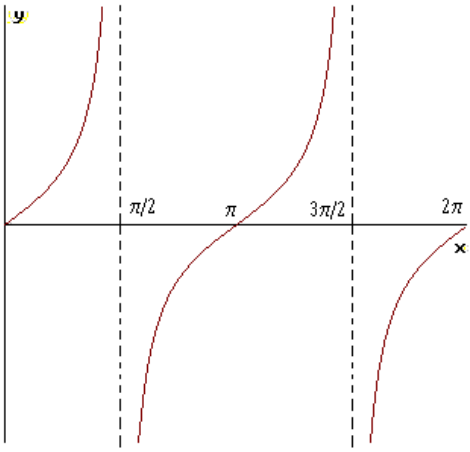
Limitate tra 1 e -1

Periodiche per 2π

F(x) = cos X



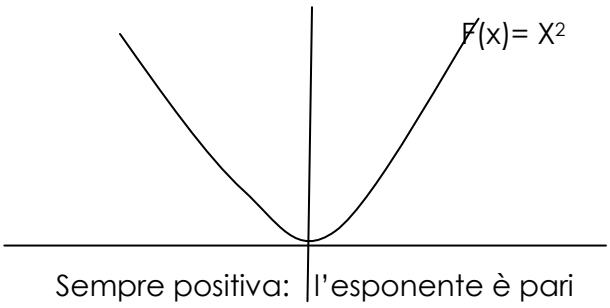
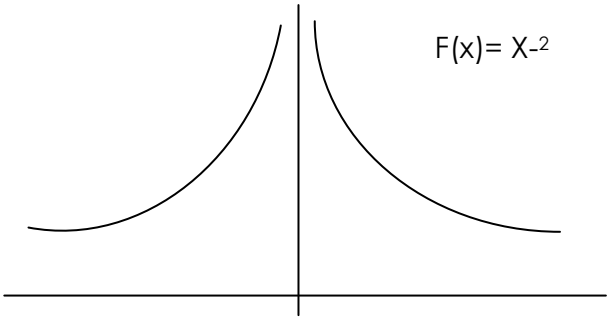
F(x) = tg x

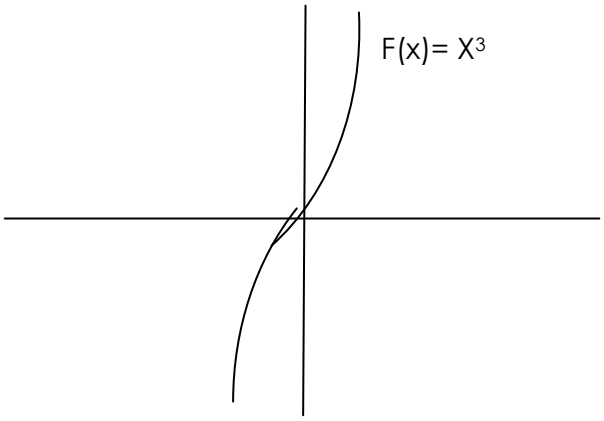
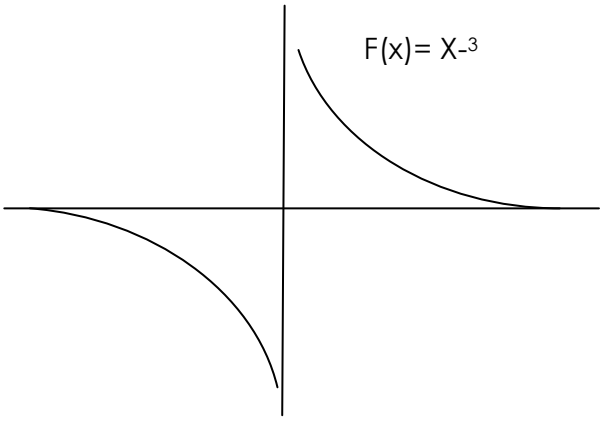


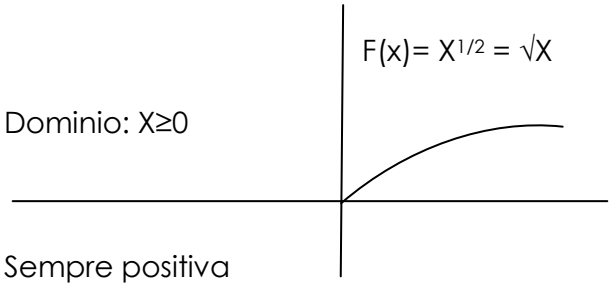
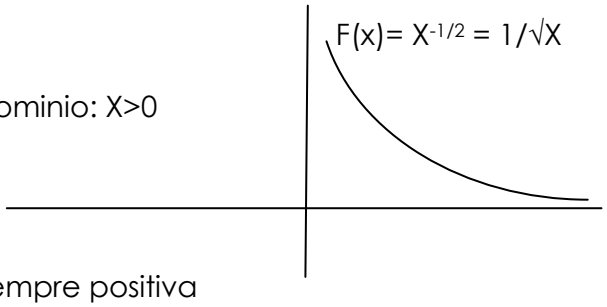
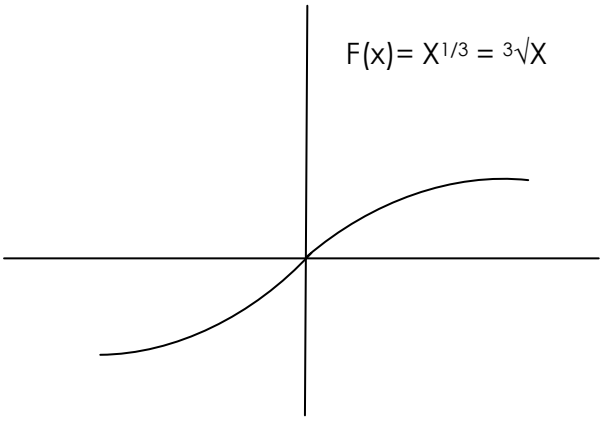
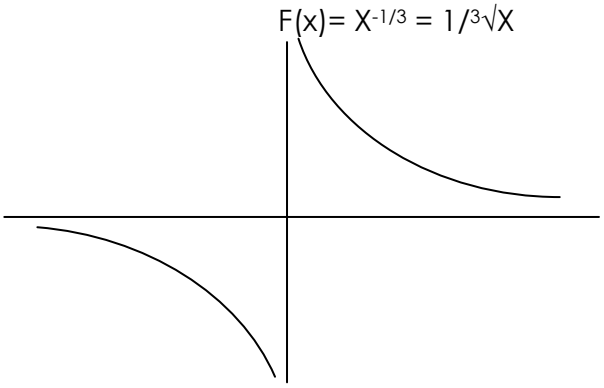
Periodica per π

π/2 e 3/2 π sono asintoti verticali

FUNZIONE POTENZA $F(x)= X^a$

a è un numero intero	
Maggiore di zero	Minore di zero
PARI	PARI
 Sempre positiva: l'esponente è pari Passa per l'origine, per 1,1 e -1,1	 Sempre positiva: l'esponente è pari Dominio: X≠0 Passa per 1,1 e -1,1

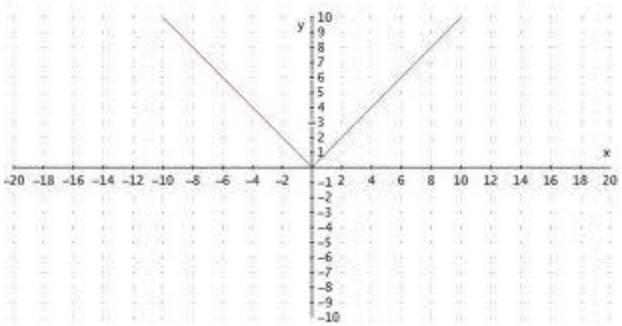
DISPARI	DISPARI
 Passa per l'origine, per 1,1 e -1,1	 Dominio: X≠0 Passa per 1,1 e -1,1 È simmetrica rispetto all'origine

a è un numero razionale	
Maggiore di zero	Minore di zero
PARI	PARI
 Dominio: X≥0 Sempre positiva Passa per 1,1	 Dominio: X>0 Sempre positiva Passa per 1,1
DISPARI	DISPARI
 Passa per 1,1 e -1,-1 È simmetrica rispetto all'origine	 Dominio: X≠0 Passa per 1,1 e -1,1 È simmetrica rispetto all'origine

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO DI X

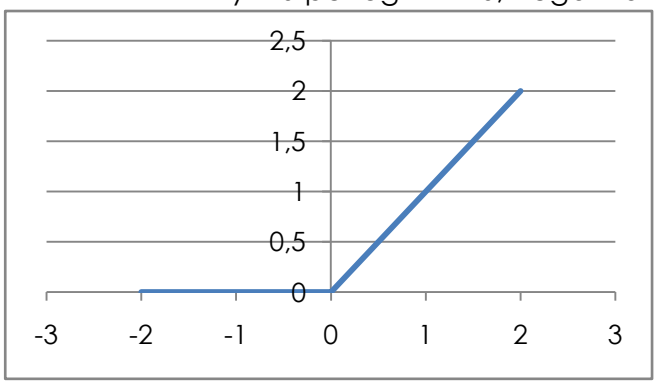
Il valore assoluto di X è x per ogni x positiva, e –x per ogni x negativa

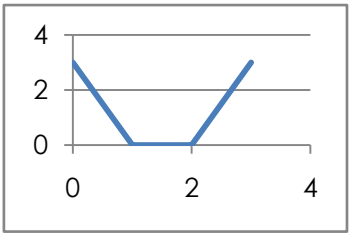
F(x) = |x| → y = x per ogni x ≥ 0
→ y = -x per ogni x ≤ 0



FUNZIONE PARTE POSITIVA DI X

F(x) = (x)⁺ → y = x per ogni x > 0, positiva
→ y = 0 per ogni x < 0, negativa

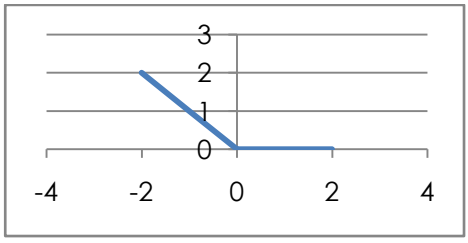




N.B Parte positiva della funzione è la funzione stessa quando la funzione (le y) è positiva, e 0 quando la funzione è negativa

FUNZIONE PARTE NEGATIVA DI X

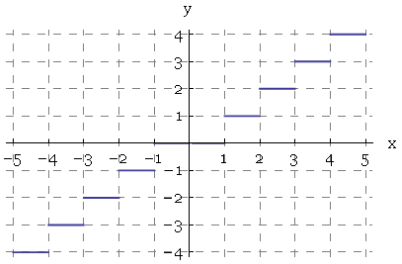
F(x) = (x)⁻ → y = x per ogni x < 0, negativa
→ y = 0 per ogni x > 0, positiva



Parte negativa della funzione è la funzione stessa quando la funzione (le y) è negativa, e 0 quando la funzione è negativa

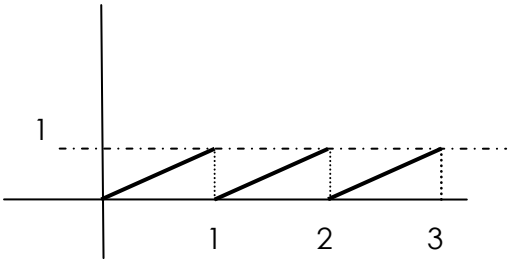
FUNZIONE PARTE INTERA DI X

F(x) = [x] → y = x se X è un numero intero
→ y = l'intero immediatamente precedente a X, se X non è un numero intero



FUNZIONE PARTE FRAZIONARIA DI X

F(x) = x - [x] → y = 0se X è un numero intero
→ y = n se X non è un numero intero



TRASFORMAZIONI

Simmetrie

y = f(-x) è la simmetrica rispetto all'asse y della funzione f(x)
y = - f(x) è la simmetrica rispetto all'asse x della funzione f(x)
y = - f(-x) è la simmetrica rispetto all'asse x della funzione f(-x) e simmetrica a F(x) rispetto all'origine degli assi.

Grafici col valore assoluto (applicazione delle simmetrie)

Y = |F(x)| → il valore assoluto della funzione è la funzione stessa quando è maggiore di zero (y >0) e **– F(x)** quando è minore di zero (y <0).
Quindi il grafico coincide con f(x) quando le y sono positive; quando le y sono negative ribalto la parte che sta sotto all'asse X portandola sopra.

Y = F(|x|) → il valore assoluto di x è x quando x>0 e –x quando x è minore di zero. Per ogni x minore di zero la funzione è **f(-x)**, per ogni x maggiore di zero il grafico è f(x)
Quindi il grafico coincide con f(x) quando le x sono positive, ed è il simmetrico di questa parte considerata [f(x)] rispetto a y quando le x sono minori di zero.

Y = |F(|x|)| → coincide con la funzione **f(x)=|x|** per i valori di y positivi. E' simmetrica rispetto a x per i valori di f(x)=|x| negativi (y<0).

Traslazioni lungo gli assi cartesiani

Y = F(a + x) → mi sposto <u>in orizzontale lungo l'asse x,</u> verso destra se a è negativo, verso sinistra se a è positivo. ESEMPIO: parabola $(x – 2)^2$

Y = F(x) + a → mi sposto <u>in verticale lungo l'asse y,</u> verso il basso se a è negativo, verso l'alto se a è positivo. ESEMPIO: parabola $(x^2 -2)$

Cambiamento unità di misura sull'asse y

Y = k[f(x)] → se k>1, espando le ordinate; se 0<K<1 contraggo le ordinate;
se k>-1 espando le ordinate e ribalto rispetto a X. se -1<K<0 contraggo le ordinate e ribalto rispetto a X.

Grafico somma di due funzioni.

Noti i grafici di due funzioni, possiamo ottenere il loro grafico somma, sommando le ordinate corrispondenti.

Funzione inversa

Sia F una funzione biunivoca (ovvero che ad ogni elemento dell'insieme A, corrisponde un solo elemento dell'insieme B). La funzione inversa associa ogni elemento dell'insieme B a un elemento dell'insieme A.

Come si trova?

Si esplicita la funzione rispetto a y

Esempio: f(x)= 2X+1 → Y=2X+1 → -2X=- Y+1 → 2X= Y – 1 → **X = ½ Y – ½** cambio nome alle variabili e ottengo l'inversa **Y = ½ X – ½**

- definizione di limite di una funzione a un numero n

Consideriamo F(x) definita in un intervallo [a, b], escluso al più il punto Xo (a cui il limite tende). → $\lim_{x \to xo} F(x) = l$

<u>se l è un numero finito,</u> fissato un ξ piccolo a piacere maggiore di zero, esiste per ogni valore di X un intorno completo del punto Xo tale che per ogni valore assunto da X per ogni valore di x maggiore di Xo vale la relazione

| F(x)- l | < ξ → l - ξ < F(x) < l + ξ

In linguaggio matematico : ξ > 0 E l_{xo} ∀ X> Xo tale che| f(x) + l |< ξ

Se invece il <u>risultato dell'operazione di limite è ∞</u> fissato un numero M grande a piacere esiste un intorno completo del punto Xo tale che per ogni valore di x maggiore di Xo è verificata la relazione

| F(x)| > M

Se nessuna di queste due relazioni è verificata, il limite non esiste

- definizione di limite di una funzione all'infinito

$\lim_{x \to \infty} F(x) = L$

<u>se l è un numero finito,</u> fissato un ξ piccolo a piacere maggiore di zero, esiste un numero K_ξ tale che per ogni valore di |X|> K_ξ vale la relazione

| F(x)- L | < k ξ → L - ξ < F(x) < L + ξ

Se invece il <u>risultato dell'operazione di limite è ∞</u> fissato M grande a piacere troviamo N maggiore di zero tale cheper qualsiasi |x|> N il grafico della funzione si trova fuori dalla striscia y = M e y = -M

| F(x)| > M → F(x) > M e F(X)> - M

Se nessuna di queste due relazioni è verificata, il limite non esiste

- Teoremi sui limiti: teorema di unicità del limite (dimostrazione)

ENUNCIATO: <u>se esiste il limite per X che tende a Xo della funzione, tale limite è unico</u>

DIMOSTRAZIONE: (si dimostra per assurdo)

Ipotizziamo esistano più limiti per la stessa funzione che tende a Xo

$\lim_{x \to xo} F(x) = L$ $\lim_{x \to xo} F(x) = L'$ $L < L'$

Considerando la definizione di limite per x che tende a Xo abbiamo

ξ > 0 E l_{xo} ∀ X> Xo tale che| f(x) + l |< ξ

quindi c'è un intervallo l_1 L - ξ < F(x) < L + ξ

e un intervallo l_2 L' - ξ < F(x) < L' + ξ

} $l_1 \cup l_2$ Valgono contemporaneamente, si intersecano

Fisso ξ < (L- L')/2 e *arrivo a* L + ξ < L' – ξ

Trovo questa catena di relazioni L - ξ < F(x) < L + ξ < L' - ξ < F(x) < L' + ξ

Che mi porta a ***F(x) < F(x) → ASSURDO*** *dato che F(x) è la stessa funzione*

- Teoremi sui limiti: teorema di unicità del segno (dimostrazione)
ENUNCIATO: <u>se il limite per X che tende a Xo è uguale a L e L ≠ 0 esiste un intorno completo del punto Xo in cui la funzione ha lo stesso segno del limite</u>

DIMOSTRAZIONE:
partendo dalla definizione di limite $\xi > 0$ E I_{xo} $\forall$ X> Xo tale che $|\ f(x) + l\ | < \xi$
capisco che L può essere maggiore o minore di zero → $|L| > 0$
ξ deve essere maggiore di zero;
fisso $\xi = |L|$ *e togliendo il valore assoluto trovo che*
- Se L>0 → L-L < F(x) < L+L → 0 < F(x) < 2L → c'è un intorno in cui F(x) è positiva
- Se L<0 → L+L < F(x) < L-L → 2L < F(x) < 0 → c'è un intorno in cui F(x) è negativa

- Teoremi sui limiti: teorema del confronto (dimostrazione)
ENUNCIATO: <u>consideriamo due funzioni, F(x) e G(x); i loro limiti per X che tende a Xo coincidono e sono uguali a L. Se F(x) < H(x) < G(x), anche il limite di H(x) sarà uguale a L.</u>

DIMOSTRAZIONE:
partendo dalla definizione di limite $\xi > 0$ E I_{xo} $\forall$ X> Xo tale che $|\ f(x) + l\ | < \xi$
$\lim_{x \to xo} F(x) = L$ → $\xi > 0$ E $I1_{xo}$ $\forall$ X E $I1_{xo}$ tale che $L - \xi < F(x) < L + \xi$
$\lim_{x \to xo} G(x) = L$ → $\xi > 0$ E $I2_{xo}$ $\forall$ X E $I2_{xo}$ tale che $L - \xi < F(x) < L + \xi$

- limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$\lim_{x \to xo} (1+X)^{1/X} = e$ $\lim_{x \to xo} (\ln 1+1/X)^{X} = 1$ $\lim_{x \to xo} ([1+X]/X)^{X} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Continuità/ Discontinuità

- definizione di continuità e proprietà delle funzioni continue
Una funzione è continua in Xo se il limite per X che tende a Xo coincide col valore assunto dalla funzione nel punto Xo. Una funzione è continua nell'intervallo se questa definizione vale per ogni punto dell'intervallo.

Proprietà delle funzioni continue:
- la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente di due funzioni continue è una funzione continua.
- tutte le funzioni elementari sono continue all'interno del loro Campo di Esistenza.

- continuità delle funzioni composte
Se le funzioni che compongono una funzione composta sono continue, anche la funzione composta è continua

- Teoremi sulle funzioni continue: teorema degli zeri (enunciato)
Consideriamo F(x). Se il prodotto degli estremi dell'intervallo in cui la funzione è definita è negativo, ovvero in altre parole, se un estremo è positivo e uno negativo esiste almeno un punto Xo in cui la funzione vale zero (Y = 0, interseca l'asse Y).

- Teoremi sulle funzioni continue: teorema di waerstrass (enunciato)
Esistono sicuramente due punti interni all'intervallo in cui la funzione è continua, in cui la funzione assume valore massimo (massimo assoluto) e valore minimo (minimo assoluto)

- Teoremi sulle funzioni continue: teorema dei valori intermedi (enunciato)
La funzione tocca sicuramente almeno una volta tutti i valori compresi tra il valore massimo e il valore minimo assunti nell'intervallo. L'immagine della funzione non ha buchi

- Discontinuità di 1 specie (a salto)
Esistono sia il limite destro che il limite sinistro per X che tende a Xo ma non coincidono

- Discontinuità di 2 specie
O il limite destro, o il limite sinistro o entrambi non esistono o sono ∞

- Discontinuità di 3 specie (sanabile)
Esistono sia il limite destro che quello sinistro, coincidono ma o la funzione non è definita in quel punto o il valore di F(xo) è diverso dal valore del limite.

Derivate

- definizione di rapporto incrementale

Il rapporto incrementale è il rapporto tra l'incremento della funzione da F(xo) a F(xo + h) e l'incremento della variabile X (h)(che l'ha causato).

$$\frac{\text{Incremento funzione}}{\text{Incremento variabile}} = \frac{F(xo + h) - F(xo)}{(xo + h) - xo} = \frac{\mathbf{F(xo + h) - F(xo)}}{\mathbf{h}}$$

- definizione di derivata in un punto Xo

La derivata della funzione nel punto Xo è il limite del rapporto incrementale per h che tende a zero, se esiste ed è finito.

- definizione di funzione derivata

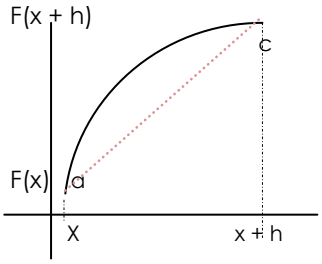
E' la funzione che mostra il variare della derivata al variare del punto Xo considerato.

- definizione funzione derivabile

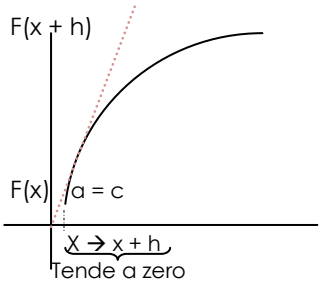
Una funzione è derivabile se esistono finiti sia il limite destro che il limite sinistro del rapporto incrementale per h che tende a zero, e coincidono. Se i limiti non coincidono il punto Xo è detto "punto angoloso della funzione".

Tutte le funzioni derivabili sono continue. Esistono funzioni continue non derivabili

- considerazioni geometriche sulle derivate e applicazioni



Il rapporto incrementale è il coeff. Angolare della retta ac



La derivata è il coefficiente angolare della retta tg al punto a

Geometricamente F è derivabile se esiste finito il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto a di ascissa X.

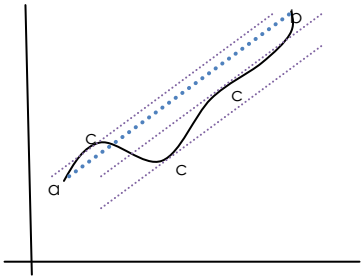
APPLICAZIONE: è possibile venga chiesto di calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione in un dato punto.
Trovata la derivata nel punto t, che è il coefficiente angolare della retta, usiamo la formula del fascio di rette passanti in un punto:
Y – Yt = M (X – Xt)
e sostituiamo a M la derivata nel punto t

- Teorema di Lagrange: enunciato e interpretazione geometrica

Consideriamo F continua in [a, b] e derivabile in (a, b).
Esiste almeno un punto C tale che

$$\underbrace{F'(c)}_{\text{coeff. Angolare tangente nel punto C}} = \underbrace{\frac{F(b) - F(a)}{b - a}}_{\text{coefficiente angolare retta ab}}$$

Graficamente esiste almeno un punto C in cui la retta tangente alla funzione in quel punto è parallela alla retta ab

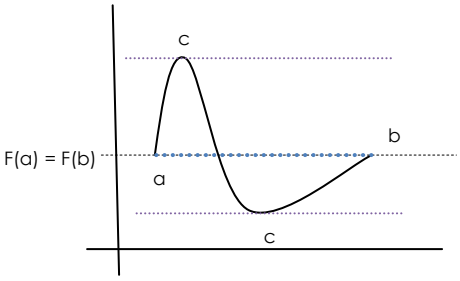


- Teorema di Rolle: enunciato e interpretazione geometrica

N.B. è un caso del teorema di Lagrange, in cui F'(c) = 0

Consideriamo F continua in [a, b] e derivabile in (a, b), e siano F(a) e F(b) uguali.
Esiste almeno un punto C interno all'intervallo tale che f'(c)= 0.

Graficamente la derivata, ovvero la retta tangente nel punto C è parallela all'asse X.



- Teorema di Cauchy: enunciato e interpretazione geometrica

Siano F e G due funzioni F continue in [a, b] e derivabili in (a, b) e sia G'(x) ≠ 0 in ogni punto dell'intervallo. Esiste almeno un punto C che verifica la relazione

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $Q = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)}$ → G(b) – G(a) ≠ 0 per ipotesi. Altrimenti varrebbe Rolle se G(b) = G(a) , e ci sarebbe almeno un G' = 0

Costruiamo la funzione ausiliaria $F(x) = F(x) - F(a) - Q\,[G(x) - G(a)]$

$$F(a) = F(a) - F(a) - Q\,[G(a) - G(a)] = 0$$

$$F(b) = F(b) - F(a) - \left(\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)}\right) \cdot [G(b) - G(a)] = 0$$

Quindi $F(a) = F(b)$.
Per il teorema esiste almeno un punto in cui $F'(c) = 0$

$$F'(c) = f'(c) - \left(\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \cdot G'(x)\right) = 0$$

Quindi l'ipotesi è verificata

$$\begin{cases} f'(c) - [Q \cdot g'(x)] = 0 \\ f'(c) = Q \cdot g'(x) \rightarrow \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = Q = \dfrac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \end{cases}$$

- Teorema di De l'Hopital: enunciato e interpretazione geometrica

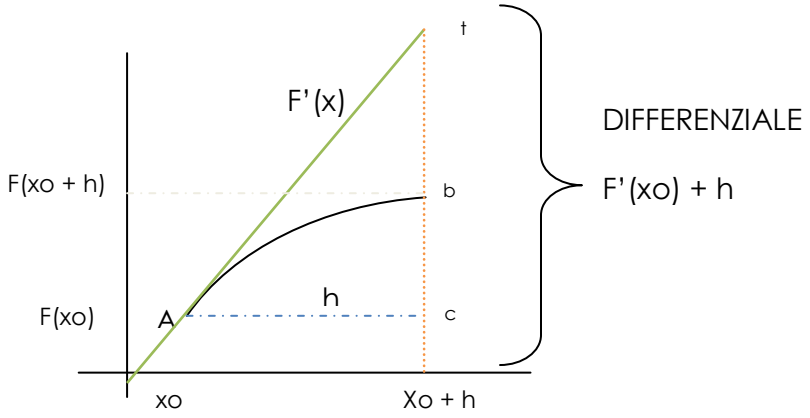
Siano F e G due funzioni derivabili in un intorno del punto Xo, escluso al più il punto Xo, e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $X \neq Xo$.
Se il limite per X che tende a Xo di F(x) è uguale al limite per X che tende a Xo di G(x) e sono entrambi pari a zero, il limite (ammesso che esista) del rapporto di F(x)/G(x) è uguale al limite per X che tende a Xo di F'(x) / G'(x).

Questo teorema può essere utilizzato per eliminare la forma indeterminata 0/0 nel calcolo del limite di un rapporto di polinomi.

- differenziale di una funzione

Consideriamo una funzione derivabile F. Definiamo differenziale della funzione nel punto Xo relativo a un incremento h della variabile X come **dF(xo)= F'(xo)· h**
Il differenziale di una funzione è **dF(x)= F'(x) dx**, perché il differenziale di X (dx) è uguale a h.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



- Polinomio di Taylor e di Mac Laurin

Sfruttando il concetto di differenziale è possibile approssimare una funzione con un polinomio:

$F(x) = Pn\,(x) + 0(X-Xo)_n$

Polinomio errore

Pn(x) è il polinomio di TAYLOR di ordine n relativo alla funzione F(x) nel punto Xo.

$Pn(x) = F(Xo) + F'(Xo)(X - Xo) + 1/2!\ F''(Xo)(X - Xo)2 + 1/3!\ F'''(Xo)(X - Xo)3 +$
$+ 1/n!\ Fn(Xo)(X - Xo)n$

Quando il punto Xo in cui calcoliamo il polinomio approssimante è 0, il polinomio è datto di MAC LAURIN.

Studio di funzione

1. Dominio / campo d'esistenza

CONDIZIONI DI ESISTENZA
Funzione polinomiale → tutto R
Funzione fratta → denominatore ≠ 0
Funzione irrazionale → indice pari → radicando > 0
indice dispari→ tutto R
Funzione esponenziale → tutto R
Funzione logaritmica → argomento > 0

Se una funzione è composta si mettono a sistema le condizioni di esistenza delle funzioni che la compongono. Il C.d.E è dove valgono contemporaneamente

2. Intersezioni con gli assi

Con asse X $\begin{cases} y = 0 \\ Y = F(x) \end{cases}$ Risolvo l'equazione F(x) = 0

Con asse Y $\begin{cases} x = 0 \\ Y = F(x) \end{cases}$ calcolo F(0)

2. Studio del segno

Risolvo F(x)≥ 0

Individuo l'intervallo/ gli intervalli per cui la funzione è positiva e quelli per cui è negativa. Cancello dal disegno dove non si trova la funzione

3. Simmetrie

La funzione è simmetrica rispetto a Y se F(-x) è uguale a F(x) (è una funzione pari)
La funzione è simmetrica rispetto all'origine se –F(x) è uguale a F(-x) (è una funzione dispari)

N.B. Se capita uno studio di funzione col Valore assoluto, è possibile studiare la parte che coincide con F(x) (per le F(x) positive o per le X positive) e disegnare l'altra parte per simmetria:

Y = |F(x)| → il valore assoluto della funzione è la funzione stessa quando è maggiore di zero (y >0) e **– F(x)** quando è minore di zero (y <0).
Quindi il grafico coincide con f(x) quando le y sono positive; quando le y sono negative ribalto la parte che sta sotto all'asse X portandola sopra.

Y = F(|x|) → il valore assoluto di x è x quando x>0 e –x quando x è minore di zero. Per ogni x minore di zero la funzione è **f(-x),** per ogni x maggiore di zero il grafico è f(x)
Quindi il grafico coincide con f(x) quando le x sono positive, ed è il simmetrico di questa parte considerata [f(x)] rispetto a y quando le x sono minori di zero.

Y = |F(|x|)| → coincide con la funzione **f(x)=|x|** per i valori di y positivi. E' simmetrica rispetto a x per i valori di f(x)=|x| negativi (y<0)

4. Asintoti

Definiamo "asintoto" una retta alla quale la funzione tende ad avvicinarsi
$\lim_{x \to \infty}$ (eq. Asintoto) – F(x) = 0

Asintoto verticale	Asintoto Orizzontale	Asintoto Obliquo
Nei punti esclusi dal dominio	Se non c'è quello obliquo	Se non c'è quello orizzontale
C'è se $\lim_{x \to x_0} F(X) = \infty$ N.B. : Xo è il punto escluso dal dominio	C'è se $\lim_{x \to \infty} F(X) = L$ Se non c'è (il limite è ∞) calcolo l'obliquo	C'è se $\lim_{x \to \infty} \frac{F(X)}{X} = M$ e $\lim_{x \to \infty} F(X) - Mx = N$ Se il limite di uno dei due o entrambi è ∞, non c'è
EQUAZIONE → X= Xo	EQUAZIONE → Y= L	EQUAZIONE → Y = Mx + N

Dimostrazione di teoria: la formula dell'asintoto obliquo
La distanza tra la retta e la funzione diminuisce man mano che entrambe tendono a ∞.
Considerando la definizione di asintoto $\lim_{x \to \infty} (Mx + n) - F(x) = 0$
Ricavo:

- $\frac{\lim_{x \to \infty} (Mx + n) - F(x)}{X} = \frac{\lim_{x \to \infty} (Mx + n) - F(x)}{\lim_{x \to \infty} X} = \frac{0}{\infty} = 0$

  $\lim_{x \to \infty} \frac{Mx}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{n}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

  $\frac{M}{\infty} + n - \frac{\lim_{x \to \infty} F(x)}{x} = 0$

  $M = \frac{\lim_{x \to \infty} F(X)}{X}$

- $\lim_{x \to \infty} (Mx + n) - F(x) = 0$

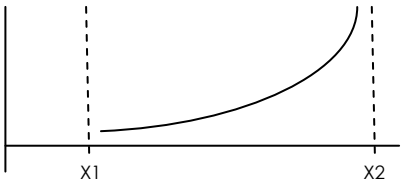
  $\lim_{x \to \infty} Mx + \lim_{x \to \infty} n - \lim_{x \to \infty} F(x) = 0$

  $N = \lim_{x \to \infty} F(x) - \lim_{x \to \infty} Mx$

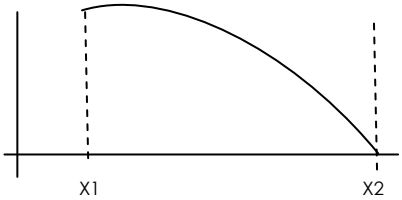
  $N = \lim_{x \to \infty} F(x) - Mx$

5. Massimi e minimi relativi, crescenza e decrescenza (derivata prima)

Una funzione è **crescente** in un intervallo (a, b) se per ogni coppia di valori di X considerati, X1 e X2, tali che X1<X2, , F(X1) < F(X2)



Una funzione è **decrescente** in un intervallo (a, b) se per ogni coppia di valori di X considerati, X1 e X2, tali che X1< X2, , F(X1) > F(X2)



TEOREMA.

- Se F è derivabile nell'intervallo (a, b) e la derivata F'(x) è positiva, in quell'intervallo la funzione è crescente.
- Se F è derivabile nell'intervallo (a, b) e la derivata F'(x) è negativa in quell'intervallo la funzione è decrescente.

Queste ipotesi si dimostrano col teorema di Lagrange.
Esempio di dimostrazione del teorema *Se F è derivabile nell'intervallo (a, b) e la derivata F'(x) è positiva, in quell'intervallo la funzione è crescente*.
Per il teorema di lagrange esiste un punto C tale che $F'(c)= \frac{F(X2) - F(X1)}{X2 - X1}$. Consideriamo F'(c) > 0 per ipotesi.
Dato che quindi il rapporto è positivo, ne consegue che F(X2) – F(X1) > 0 e X2 – X1 > 0 (condizione dell'enunciato del teorema). Quindi visto che F(X2) – F(X1) > 0, è dimostrato che F(X2) > F(X1).
In breve: DERIVATA POSITIVA → F. Crescente
DERIVATA NEGATIVA → F. Decrescente

Xo è un punto di **Minimo Relativo** se esiste un intorno completo di Xo tale che per ogni x appartenente a quell'intorno, il valore assunto dalla funzione in Xo è ≤ al valore assunto dalla funzione in tutti gli altri punti dell'intorno.

Xo è un punto di **Massimo Relativo** se esiste un intorno completo di Xo tale che per ogni x appartenente a quell'intorno, il valore assunto dalla funzione in Xo è ≥ al valore assunto dalla funzione in tutti gli altri punti dell'intorno.

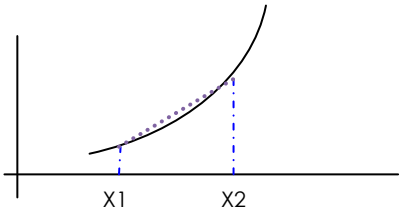
TEOREMA.

- Sia Xo un punto interno all'intervallo (a, b) (non vale negli estremi).
  Condizione necessaria affinchè Xo sia un punto di minimo/massimo relativo è che la derivata prima nel punto sia pari a 0. E' condizione <u>necessaria ma non sufficiente</u>: non è detto che il punto Xo sia un massimo/minimo relativo(può essere un punto fuori dominio o un punto di flesso).

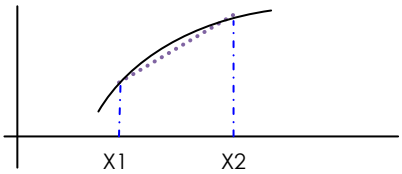
6. Concavità, convessità, punti di flesso (derivata seconda)

Sia F definita in un intervallo I.

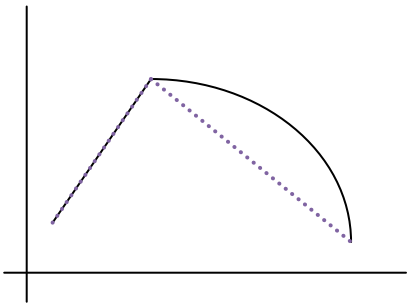
F è **convessa** (concavità rivolta verso l'alto) se considerando ogni coppia di valori X1 e X2, la retta che li unisce si trova al di sopra del grafico.



F è **concava** (concavità rivolta verso il basso) se considerando ogni coppia di valori X1 e X2, la retta che li unisce si trova al di sopra del grafico.

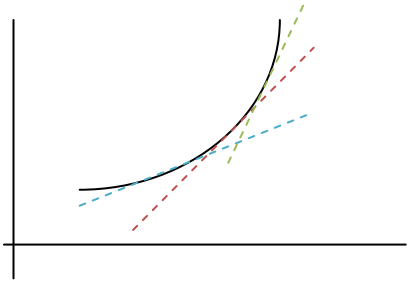


Una funzione è strettamente concava/convessa se il segmento che congiunge i due punti è sempre tutto al di sotto/ al di sopra del grafico.
Non è strettamente concava/convessa se il segmento per una parte coincide col grafico stesso. (v. disegno)

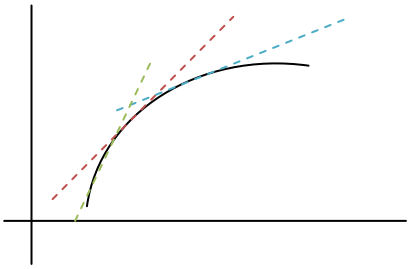


Sia F derivabile in I
(N. B. La derivata in un punto rappresenta il coefficiente angolare della Retta tangente in quel punto)

F è **convessa** (concavità rivolta verso l'alto)se la retta Tangente ad ogni punto della funzione di trova Al di sotto del grafico della funzione stessa per ogni X dell' intervallo.



F è **concava** (concavità rivolta verso il basso)se la retta Tangente ad ogni punto della funzione di trova Al di sopra del grafico della funzione stessa per ogni X dell' intervallo.



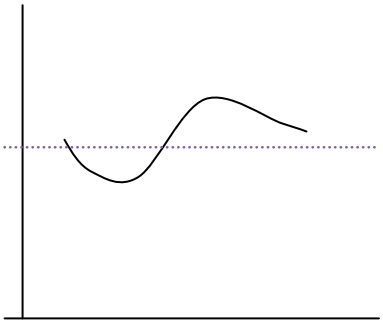
TEOREMA.

- Per stabilire se una funzione è concava o convessa basta osservare il segno della derivata seconda. E' condizione necessaria e sufficiente.
  - $F''(X) > 0 \rightarrow (+) \rightarrow$ funzione convessa
  - $F''(X) < 0 \rightarrow (-) \rightarrow$ funzione concava

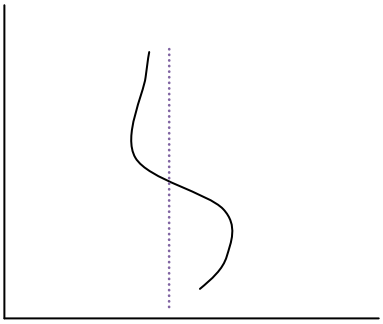
Se per $X < Xo$ la funzione è convessa e per $X > Xo$ la funzione è concava, Xo è un **punto di flesso** discendente.
Se per $X < Xo$ la funzione è concava e per $X > Xo$ la funzione è convessa, Xo è un **punto di flesso** ascendente.

Il punto di flesso può essere

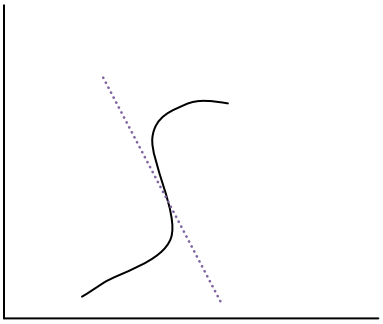
A tangenza orizzontale



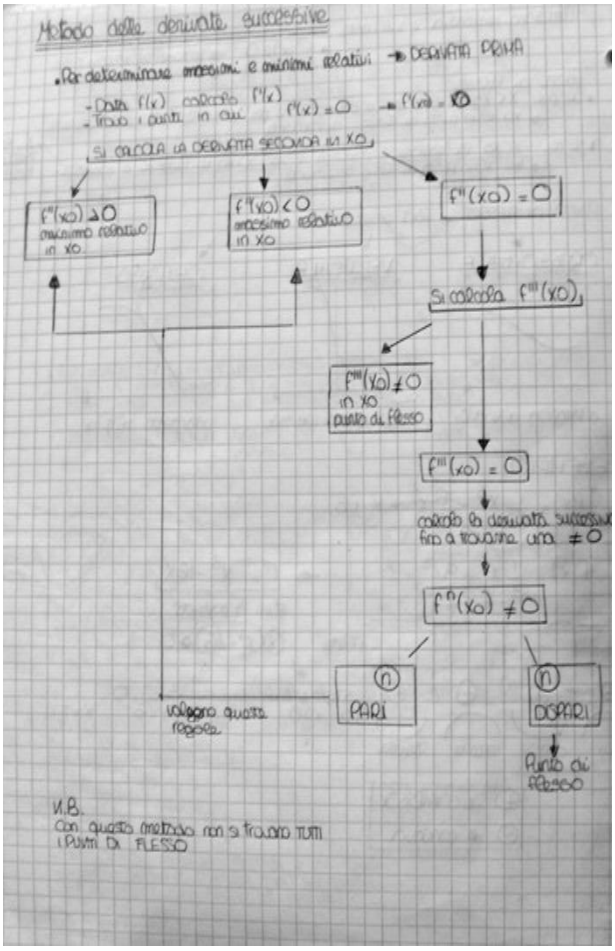
a tangenza verticale



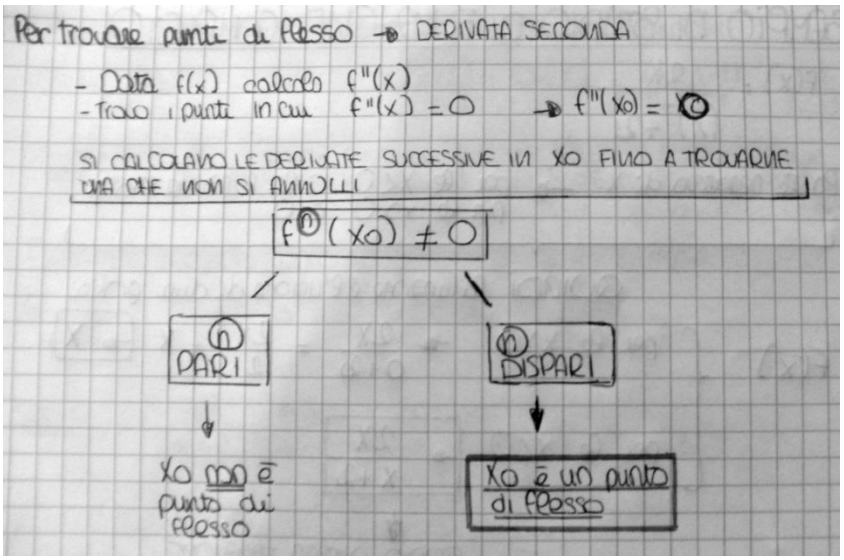
a tangenza obliqua



METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE → massimi e minimi



METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE → punti di flesso



Gli integrali

Funzione primitiva
Si dice che F(x) è la primitiva di f(x), se derivando F(x) ottengo f(x).
Data una funzione le sue primitive sono infinite: variano a meno di una costante additiva arbitraria C
F(x) + C = f(x)

Integrale indefinito
Data la funzione f(x), è detto integrale indefinito di f rispetto a X la famiglia di primitive F(x) + C

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Proprietà degli integrali indefiniti
<u>Integrale di una costante moltiplicativa</u> → porto la costante fuori dall'operazione di integrale
<u>Integrale di una Somma o differenza</u> → scompongo in una somma/differenza di integrali

Integrali indefiniti immediati

$$\int X^a = \frac{1}{a+1} X^{a+1} + C$$

Se a = 0 → $\int dx = X$
Se a = 1 → $\int X\,dx = \frac{1}{2} X^2$
Se a = 1/2 → $\int \sqrt{X}\,dx = 2/3\, X^{3/2}$

Eccezione:
$\int X^{-1}\,dx = \ln|x| + c$

$$\int a^x = \frac{a^x}{\ln a} X^{a+1} + C$$

$$\int \cos X\,dx = \operatorname{sen} X + C$$

$$\int \operatorname{sen} X\,dx = -\cos X + C$$

Metodi di integrazione

<u>Scomposizione</u>: scompongo l'integrale in una somma/differenza di integrali immediati di cui si conosce il risultato.

<u>Sostituzione</u>: sostituisco la variabile X con una variabile T legata a x da una relazione opportuna che permetta di semplificare l'operazione di integrazione. Ponendo t = 3X devo trovare anche a cosa corrisponde dt. Per trovarlo differenzio, ovvero derivo la relazione che lega X a t, quindi dt= 3 dx.

<u>Per parti:</u> applico una formula che mi permette di integrare due funzioni. Occorre individuare quale parte è g'(x), che verrà integrata, e quale è f(x) che verrà derivata.

$$\int f * g'\,dx = f*g - \int f' * g\,dx$$

Questa regola si ricava integrando la derivata del prodotto di due funzioni.
$\int D[f * g]\,dx = \int f' * g\,dx + \int f * g'\,dx$ da cui si ricava la formula di prima.

Integrazione funzioni fratte:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}$$

Eccezione:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

2 casi

Denominatore di grado superiore al numeratore

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} = \int \frac{A}{(x+g)} \quad \int \frac{B}{(x+c)}$$

scompongo il denominatore con somma-prodotto o cercando le due radici

ottengo sempre

$$k^*\int \frac{1}{(x+g)} + h^*\int \frac{1}{(x+c)}$$

e risolvo trovando $K^* \ln|(x+g)| + h^*|(x+c)|$

Denominatore di grado inferiore al numeratore

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} = \int Q(x) + \int \frac{R(x)}{D(x)}$$

trovo quoziente e resto e risolvo l'integrale col procedimento sopra. Il resto ha grado minore del denominatore.

Integrale definito

Sia f(x) continua nell'intervallo (a, b) e sia F(x) la primitiva di f(x).

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

= il risultato è un numero che non dipende dalla variabile di integrazione x

Proprietà.

- se a<b $\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

- se b = a l'integrale è =0

- proprietà di linearità

posso portare fuori la costante moltiplicativa e scomporre l'integrale di una somma in una somma di integrali

- proprietà di additività

Sia C un punto dell'intervallo (ab)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- proprietà del confronto

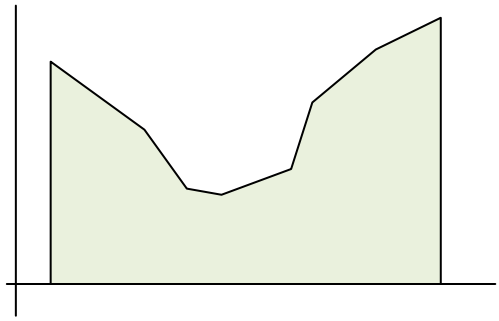
Consideriamo due funzioni, f(x) e g(x). se f(x)<g(x). Questa relazione vale anche tra i loro integrali.

- proprietà della media

Se f(x) è continua in (a, b) esiste un punto c appartenente all'intervallo tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) * (b - a)$$

significato geometrico dell'integrale definito
è la misura dell'area della regione compresa tra il grafico y=f(x) e l'asse x e le rette di equazione x=a e x=b che delimitano l'intervallo dove viene calcolato l'intervallo indefinito.



Integrali impropri
Quando nell'intervallo (a,b) ci sono punti di discontinuità. Si pone uguale alla somma di due integrali, si integra tra a e c-ξ e c+ξ e b. Se esistono finiti entrambi i limiti la funzione converge.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to 0} \int_a^{c-\xi} f(x)\,dx + \lim_{\xi \to 0} \int_{c+\xi}^{b} f(x)\,dx$$

Integrali estesi a intervalli illimitati
Consideriamo f(x) definita e continua in (a, + ∞)

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

se il risultato è un numero finito la funzione converge.