Introduzione PAG 3

Il **PIL** pro capite rappresenta un indicatore imperfetto del benessere di una nazione (non prende in considerazione, la distribuzione del reddito, l'utilità degli agenti economici, il consumo di risorse non riproducibili, come l'ambiente…), è tuttavia ancora l'indicatore principale a cui gli economisti e i policy makers guardano per esaminare il livello di benessere relativo di un paese rispetto ad un altro o dello stesso paese nel corso del tempo.

Il tasso di crescita del PIL che il tasso di crescita del PIL pro capite siano stati molto bassi nel periodo precedente la rivoluzione industriale, e come siano invece cresciuti nel periodo successivo al 1820 e, con l'esclusione di USA e Regno Unito (che avevano già raggiunto un elevato livello di PIL pro capite) nei venticinque anni successivi alla seconda guerra mondiale. Notiamo una sostanziale decelerazione del PIL pro capite nel periodo 1973-2001 nei paesi (Fra Ger Ita UK Spa USA). I principali messaggi che possiamo trarre:

- la crescita economica, intesa come crescita del PIL pro capite, è un fenomeno relativamente recente, che ha assunto una grandezza apprezzabile solo a partire, grosso modo, dalla Rivoluzione industriale;
- limitatamente all'Italia, notiamo che il tasso di crescita del PIL pro capite è rimasto sostanzialmente inferiore rispetto a quello di paesi come Fra, Ger, USA e UK, per poi accelerare soprattutto nel periodo successivo alla seconda guerra mondiale, quando il reddito pro capite italiano è risalito a livelli simili rispetto a quello dei maggiori paesi occidentali. Sebbene nel periodo 1973-2001 il tasso di crescita del PIL pro capite in Italia sia sceso rispetto ai valori del periodo precedente, la riduzione è stata inferiore rispetto a quello degli altri paesi considerati, ad eccezione della Spa.

Alcune definizioni: PAG 8

Y: PIL (o reddito)
P: Popolazione
PL = popolazione in età lavorativa
E: Occupati
H: Ore lavorate
FL: Forza lavoro
y = **Y/P** : PIL pro capite

E' utile decomporre il livello e, soprattutto, il tasso di crescita del PIL pro capite nei suoi elementi costitutivi. In particolare, possiamo scrivere: **y** = Y/P = (Y/H)*(H/P) = (Y/H)*(H/E)*(E/P) = (Y/H)*(H/E)*(E/LF)*(LF/PL)*(PL/P) (1.1)

L'equazione 1.1 suddivide il PIL pro capite in una serie di parti "elementari". In particolare, il secondo segno di uguale ci dice che il PIL pro capite è il prodotto di **Y/H**, vale a dire il rapporto fra PIL e ore lavorate (noto come produttività del lavoro (NB: in alcuni casi la produttività del lavoro è costruita come il rapporto fra PIL e occupati, ma l'utilizzo del rapporto fra PIL e ore lavorate è preferibile, in quanto non dipende dall'ammontare di ore lavorate)) e **H/P**, l'intensità del lavoro, vale a dire le ore lavorate pro capite. Data la produttività del lavoro, più alte sono le ore lavorate per abitante, e più alto è il PIL pro capite. Il terzo segno di uguale scompone H/P in **H/E**, vale a dire le ore lavorate per occupato e **E/P**, vale a dire la frazione di abitanti che è occupata. Infine, l'ultima parte dell'equazione ci dice che E/P è il prodotto di **E/LF**, vale a dire il tasso di occupazione (cioè il rapporto fra occupati e forza lavoro), **LF/PL**, vale a dire il rapporto fra forza lavoro e popolazione in età lavorativa, e **PL/P**, il rapporto fra popolazione in età lavorativa e popolazione totale.

L'equazione ci dice che, a parità di condizioni, il PIL pro capite di un paese è tanto più alto quanto maggiori sono la produttività del lavoro, le ore lavorate per occupato, il tasso di occupazione, il rapporto fra forze lavoro e popolazione in età di lavoro e la frazione di popolazione in età da lavoro rispetto al totale degli abitanti.

L'equazione può essere riformulata **in termini di tassi di variazione**: g(y) = g(Y/P) = g(Y/H) + g(H/P) = g(Y/H) + g(H/E)+ g(E/P) = g(Y/H) + g(H/E) + g(E/LF) + g(LF/PL) + g(PL/P) (1.2)

Nell'equazione 1.2 abbiamo fatto uso del fatto che il tasso di crescita g di x*y è approssimativamente uguale al tasso di crescita di x più il tasso di crescita di y, dove il tasso di crescita g di x è uguale a $(x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$. L'equazione 1.2 ci dice che il tasso di crescita del PIL pro capite dipende dal tasso di crescita delle sue parti costituenti.

Teorema di Eulero PAG 18

Data una funzione a n variabili f(x), omogenea di grado k, vale la seguente relazione: $x_1\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} + \ldots + x_n\frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = kf(x)$

Elasticità PAG 18

La elasticità di una funzione y=f(x) è definita come segue: $\eta = (x/y)\,(dy/dx)$, e ci dice la variazione percentuale di y derivante da una variazione percentuale di x.

Funzione di produzione PAG 19

Nella teoria economica neoclassica la funzione di produzione è una relazione matematica che fissa il massimo ammontare producibile di output, dato un certo ammontare di fattori produttivi utilizzati. Dal punto di vista economico, la quantità di output che una impresa può ottenere da una determinata quantità di fattori produttivi (input) dipende dallo stato della tecnologia.

In generale, per rappresentare matematicamente la relazione complessa che lega le quantità di input utilizzate alla quantità di output ottenuta, gli economisti sono costretti ad introdurre una serie di assunzioni semplificatrici. Si assume che l'output sia legato agli input tramite una funzione continua, differenziabile in ogni punto e con derivate continue, e che gli input siano continuamente sostituibili fra loro: l'ultima assunzione, ha una importante implicazione, vale a dire il fatto che una certa quantità di output può essere ottenuta sostituendo un fattore produttivo con un altro. Cioè si esclude la possibilità che per produrre un certo livello di output sia necessario una certa quantità del fattore produttivo x, indipendentemente dall'utilizzo del fattore produttivo y: al contrario, si assume che un dato livello produttivo possa essere ottenuto con diverse combinazioni dei fattori x e y.

Una **funzione di produzione generica** può essere rappresentata come segue: $Y = F(K, L)$ (2.1)

Nell'equazione 2.1, **Y** rappresenta l'output prodotto da una certa impresa, settore, o paese; **K** e **L** rappresentano, rispettivamente la quantità di capitale e di lavoro utilizzati nel processo produttivo e **F** è la forma funzionale che"trasforma" i fattori produttivi in output.

Il prodotto marginale del lavoro (capitale) è definito come $\frac{\partial Y}{\partial L} = F_L$ $(\frac{\partial Y}{\partial K} = F_k)$ ed indica l'incremento di produzione derivante dall'incremento marginale del lavoro (capitale).

Legge dei rendimenti marginali decrescenti Di solito si assume che il prodotto, o produttività, marginale del lavoro e del capitale siano decrescenti, vale a dire $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$ e $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$, il che implica che incrementi successivi di lavoro (capitale), data la quantità di capitale (lavoro) determinino un incremento di prodotto decrescente, cioè sempre minore.

L'ipotesi di produttività marginale decrescente può essere rappresentata, nel caso della funzione di produzione 2.1, dalla Figura 2.2: **Figura 2.2 PAG 20**

Nella Figura 2.2 abbiamo rappresentato la relazione esistente fra la quantità di lavoro utilizzata e il livello dell'output, per un dato livello di capitale K_0. Il prodotto marginale del lavoro è la pendenza della curva $F(K_0,L)$: come si può vedere, è positiva ma decrescente, man mano che la quantità di lavoro utilizzata aumenta. Una figura simile potrebbe essere costruita nel caso del capitale.

Gli isoquanti della funzione di produzione rappresentano le differenti combinazioni di capitale e lavoro che permettono all'impresa di produrre un certo livello di output (vedi Figura 2.3).

Se prendiamo il differenziale totale della funzione di produzione rappresentata in 2.1, abbiamo:

$dY = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL$ (2.2) **Figura 2.3 PAG 21**

L'equazione 2.2 ci dice la variazione dell'output conseguente a cambiamenti marginali di entrambi gli inputs K e L. L'isoquanto è il luogo dei punti in cui un dato livello di produzione, ad esempio,

Y_0, può essere ottenuto con diverse combinazioni di capitale e lavoro: ad esempio, il livello di produzione Y_0 può essere ottenuto con combinazioni di lavoro e capitale che stanno sulla curva in basso a sinistra. In particolare, è possibile produrre il livello di produzione Y_0 sostituendo lavoro a capitale (cioè aumentando l'utilizzo di lavoro (dL>0) e riducendo l'impiego di capitale (dK<0)) scendendo lungo l'isoquanto. Perciò, siccome lungo un isoquanto la quantità di produzione non varia, possiamo porre dY=0 nell'equazione 2.2, e ottenere che $\frac{\partial F}{\partial K} / \frac{\partial F}{\partial L} = dL / dK$ (2.3)

L'equazione 2.3 ci dice che il saggio marginale di sostituzione tecnica, cioè il saggio al quale è necessario sostituire lavoro a capitale per continuare a produrre un certo ammontare di output , vale a dire dL / dK , è uguale, in valore assoluto, al rapporto fra le produttività marginali dei due input.

In particolare, si assume che il saggio marginale di sostituzione sia, in valore assoluto, decrescente: nel nostro esempio, man mano che si sostituisce lavoro a capitale, occorre impiegare sempre più lavoro per sostituire il capitale se si vuole continuare a produrre lo stesso ammontare di output.

Questo è una conseguenza diretta dell'assunzione di produttività marginale decrescente.

Rendimenti di scala PAG 22

Una funzione di produzione $F(K, L)$ ha rendimenti costanti di scala se, aumentando proporzionalmente tutti i fattori produttivi, l'output aumenta nella stessa proporzione. Una funzione di produzione omogenea $F(K, L)$ ha rendimenti di scala costanti se è linearmente omogenea, vale a dire omogenea di grado 1: $F(tK,tL) = tF(K, L)$.

In generale, se la funzione di produzione è omogenea di grado k, $F(tK,tL) = t^{K}F(K, L)$: se **K<1**, i rendimenti di scala sono decrescenti (un aumento proporzionale dei fattori produttivi genera un incremento meno che proporzionale dell'output), se **K>1** i rendimenti di scala sono crescenti (un aumento proporzionale dei fattori produttivi genera un incremento più che proporzionale dell'output) e per **K=1**, i rendimenti di scala sono costanti.

Nel caso di funzioni di produzione a livello aggregato, vale a dire rappresentative di un intera economia, si assume generalmente che i rendimenti di scala siano costanti. Questa assunzione viene di solito giustificata sulla base di due assunzioni: **1**. Si assume che l'economia presa in considerazione sia sufficientemente grande per cui eventuali vantaggi derivanti da una maggiore specializzazione del lavoro non sarebbero più ottenibili. In economie piccole, i fattori produttivi sono occupati in mansioni talora molto diverse fra loro. Al crescere della produzione è possibile ridurre la tipologia di mansioni svolte da ogni input nel processo produttivo, per cui raddoppiando l'ammontare di capitale e lavoro si otterrebbe un ammontare di output più che proporzionale. In economie "grandi", questi vantaggi della specializzazione è probabile che siano già stati esauriti, per cui se il lavoro e il capitale raddoppiano essi sarebbero utilizzati essenzialmente nello stesso modo, per cui la produzione raddoppierebbe. **2**. Si assume che altri possibili inputs, come la terra e le risorse naturali siano relativamente poco importanti.

Un'altra grandezza rilevante ai fini dell'analisi di una funzione di produzione è la **elasticità di sostituzione**, che ci dice la variazione percentuale del rapporto capitale/lavoro (vale a dire l'intensità di capitale del processo produttivo) in risposta ad una variazione percentuale nel rapporto fra i prodotti marginali dei singoli fattori produttivi (che è a sua volta uguale al saggio marginale di sostituzione tecnica). L'elasticità di sostituzione è definita come: $\sigma = \frac{d(K/L)}{d(F_L/F_K)} \frac{F_L/F_K}{K/L}$ (2.4)

L'elasticità di sostituzione fra K e L ci dice, la variazione proporzionale del rapporto capitale lavoro divisa per la variazione proporzionale del rapporto fra i prodotti marginali del capitale e lavoro, che a sua volta è uguale al saggio marginale di sostituzione tecnica. Valori bassi dell'elasticità di sostituzione ci dicono che i fattori sono di difficile sostituzione. Viceversa, nel caso di perfetta sostituibilità, l'elasticità di sostituzione tende a crescere, fino a divenire infinita (è facile sostituire capitale e lavoro lungo l'isoquanto).

Il modello di Crescita di Solow senza progresso tecnico. - La funzione di produzione PAG 25

Consideriamo una funzione di produzione del seguente tipo: $Y(t) = F(K(t), L(t))$ (3.1)

Nell'equazione 3.1 **Y**, **K** e **L** indicano, rispettivamente l'output e la quantità di lavoro e capitale utilizzati nel processo produttivo. L'indice **t** indica il tempo, che entra nella funzione di produzione 3.1 solo attraverso il capitale e il lavoro, che pertanto si assume varino nel corso del tempo? Y varia perché K e L variano nel corso del tempo.

Ipotesi 1: la funzione di produzione in 1 è linearmente omogenea? ci sono rendimenti costanti di scala: $F(tK,tL) = tF(K, L)$ (3.2)

Il fatto che vi siano rendimenti di scala costanti ci permette di lavorare con la funzione di produzione in forma "intensiva". Ponendo $t = 1/L$, abbiamo che: F(K/L,1) = (1/L)F(K,L).

(1/L)F(K,L) non è altro che il prodotto per lavoratore e K/L è il rapporto capitale/lavoro e indica l'intensità di capitale della tecnologia produttiva. Chiamiamo k = K/L, y = Y/L e $f(k) = F(k,1)$.

Possiamo perciò riscrivere la 3.2 come: $y = f(k)$ (3.3)

L'equazione 3.3 esprime il prodotto per lavoratore come funzione del capitale per lavoratore.

L'ammontare totale di output nell'economia può essere calcolato moltiplicando il lato destro dell'equazione 3.3 per L: $Y = Lf(k)$.

Ipotesi 2: si assume che la funzione di produzione in 3.3 soddisfa le seguenti condizioni: $\boldsymbol{f(0) = 0}$; $\boldsymbol{f'(k) > 0}$; $\boldsymbol{f''(k) < 0}$. La **prima** condizione ci dice che quando il rapporto capitale-prodotto è nullo, l'output per lavoratore è nullo a sua vota. La **seconda** condizione che l'output per lavoratore è una funzione crescente del capitale per lavoratore. La **terza** condizione che la 3.3 è una funzione concava, vale a dire al crescere del rapporto capitale lavoro il prodotto per lavoratore cresce ma a tassi decrescenti.

Possiamo notare che $f'(k)$ è il prodotto marginale del capitale. Infatti, sappiamo che $F(K, L) = Lf(K/L)$ Per cui, $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \frac{\partial Lf(K,L)}{\partial K} = Lf'(k)\ 1/L = f'(k)$ Per cui $f''(k) < 0$ implica che il prodotto marginale del capitale è positivo ma decrescente, cioè diminuisce quando il rapporto capitale-lavoro sale.

La produttività marginale del lavoro sarà, nel caso della funzione scritta in forma intensiva: $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{\partial Lf(K,L)}{\partial L} = f(k) + Lf'(k)K(-1/L^2) = f(k) - kf'(k)$

Ipotesi 3: Valgono le **condizioni di Inada**: $\boldsymbol{\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty}$; $\boldsymbol{\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0}$. La **prima** condizione ci dice che il prodotto marginale del capitale è molto grande quando il rapporto capitale-lavoro è molto piccolo, per cui il prodotto marginale del capitale dovrebbe essere molto alto nei paesi poveri. La **seconda** condizione ci dice che quando il rapporto capitale-lavoro è molto grande, il prodotto marginale del capitale tende a zero.

Un esempio di funzione di produzione che rispetti tutte le condizioni sopra elencate è la **Cobb-Douglas (CD):** $\boldsymbol{F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}}$, $0 < a < 1$ (3.4) $\boldsymbol{\alpha}$ rappresenta la quota del prodotto Y spettante al fattore capitale.

Ipotesi 4: Il fattore lavoro è assunto come omogeneo: tutti i lavoratori sono uguali, per cui un ora lavoro di ogni lavoratore è ugualmente produttiva. Non esiste disoccupazione, per cui gli occupati vengono fatti coincidere, per semplicità, con gli occupati.

Ipotesi 5: l'economia è chiusa e non esiste governo.

Evoluzione degli inputs nel tempo PAG 27

Abbiamo detto che, in questa versione del Modello di Solow, il prodotto Y varia nel tempo unicamente perché variano gli inputs capitale e lavoro. Dobbiamo ora specificare come variano il capitale ed il lavoro.

Fattore lavoro

Nel caso del fattore lavoro, assumiamo che cresca ad un tasso costante: $\dot{L}(t) = nL(t)$ (3.5)

Nell'equazione 3.5 e seguenti, un **puntino** sopra una variabile indica una derivata rispetto al tempo (cioè $\dot{X}(t) = dX(t)/dt$) e **n** è un parametro esogeno, assunto cioè come dato. Ora, la 3.5 può essere riscritta come: $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n$ (3.6)

L'equazione 3.6 dice che il tasso di crescita del fattore lavoro è costante ed uguale ad n, che nel lungo periodo è uguale al tasso di crescita della popolazione. Ora, sappiamo, che il tasso di crescita di un variabile è uguale al tasso di variazione del logaritmo della variabile stessa, per cui possiamo scrivere che: $\frac{d \ln L(t)}{dt} = \frac{d \ln L(t)}{dL(t)} \frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{L(t)} \dot{L}(t)$ (3.7)

La soluzione di questa equazione differenziale è: $\ln L(t) = \ln L(0) + nt$ (3.8)

La 3.8 dice che il log del fattore lavoro cresce in modo lineare al tasso n.

Prendendo l'esponenziale della 3.8, abbiamo che: $L(t) = L(0)e^{nt}$ (3.9)

La 3.8 ci dice che il fattore lavoro cresce ad un tasso esponenziale.

Fattore capitale PAG 28

In una economia chiusa e senza governo, vale la seguente identità: $Y(t) = C(t) + I(t)$ (3.10)

Il prodotto viene infatti diviso in consumo ed investimento.

Ipotesi 6: la quota di prodotto che è investita è esogena, costante ed uguale ad s: $I(t) = sY(t)$

Ipotesi 7: una unità di output investita produce una unità di capitale, cioè i beni capitali sono prodotti con la stessa tecnologia dei beni finali.

Ipotesi 8: il capitale si deprezza al tasso δ. L'investimento netto può essere visto come l'aggiunta allo stock di capitale in un dato periodo di tempo, per cui il tasso di variazione del capitale può essere visto come l'ammontare di investimento realizzato al netto del deprezzamento: $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$ (3.11)

Principali punti deboli del modello: **a)** c'è un unico bene; **b)** non vengono considerate fluttuazioni nell'occupazione; **c)** non vi è disoccupazione; **d)** il tasso di risparmio, di deprezzamento e di crescita della popolazione sono assunti come dati. In particolare, il tasso di risparmio ha mostrato un certo trend crescente nel corso del tempo; **e)** il tasso di crescita della popolazione è assunto come esogeno, mentre sembra che esso tenda a decrescere con il grado di sviluppo economico della popolazione.

Soluzione del Modello PAG 29

Ricordandoci che k= K/L, possiamo scrivere il tasso di variazione del capitale per lavoratore come:

$$\dot{K}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{\dot{K}(t)L(t)}{L(t)^2} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \quad (3.12)$$

La 3.13 può essere riscritta come: $\boldsymbol{\dot{k}(t) = sf(k) - (n + \delta)k}$ (3.14)

L'equazione **3.14 è l'equazione fondamentale del Modello di Solow**. Ci dice che il tasso di variazione del capitale per lavoratore è uguale all'investimento per lavoratore meno il cosiddetto investimento di "break even", vale a dire l'ammontare di investimento che deve essere fatto nel sistema economico per mantenere il capitale per addetto costante. Infatti il capitale si deprezza, e quindi per mantenere il capitale per addetto costante è necessario che una parte del capitale (δk) venga investito. Analogamente, la popolazione cresce, per cui non è sufficiente mantenere lo stock di capitale K costante al fine di mantenere il capitale per addetto costante, proprio perché occorre equipaggiare i nuovi lavoratori con lo stesso capitale degli altri: è necessario che il capitale K cresca al tasso n per mantenere il capitale per addetto costante. **Figura 3.1 PAG 30**

Globalmente, visto l'esistenza del deprezzamento e della crescita della popolazione, lo stock di capitale K deve crescere al tasso $n + \delta$ affinché il capitale per lavoratore sia costante.

Quando l'investimento per lavoratore eccede l'investimento di break even, il capitale per lavoratore cresce, quando succede l'opposto, il capitale per lavoratore decresce e quando i due sono uguali, il capitale per lavoratore è costante (il suo tasso di variazione è =0).

L'investimento totale realizzato nell'economia è uguale all'investimento di break-even quando le due curve si incontrano, in corrispondenza di un capitale per addetto uguale a k*.

Investimento effettivo e investimento di break-even sono uguali per k=0, in quanto $f(0) = 0$. Le condizioni di Inada ci dicono per k=0, il prodotto marginale del capitale (f(k)), è grandissimo (un incremento piccolo dello stock di capitale per addetto aumenta molto l'output per addetto), per cui

la curva $sf(k)$ è molto inclinata (la sua pendenza dipende infatti da $f'(k)$, che è molto grande, per le condizioni di Inada) e, più inclinata della curva $(n+\delta)k$, che ha pendenza $(n+\delta)$.
Pertanto, per valori **inferiori** a k*, l'investimento effettivo realizzato nell'economia eccede l'investimento di break-even, cioè l'economia risparmia più di quanto sia necessario per equipaggiare i lavoratori con uno stock di capitale tale per cui il capitale per addetto è costante, e quindi il capitale per addetto tende a crescere.
Le condizioni di Inada ci dicono anche che il prodotto marginale del capitale tende a zero per valori del capitale per addetto molto grandi (**Legge dei rendimenti decrescenti**), per cui la pendenza della curva $sf(k)$ tende a zero.
Pertanto, vi sarà necessariamente un punto in corrispondenza del quale l'investimento effettivo sarà uguale a quello di brek-even (la pendenza della retta $(n+\delta)k$ non dipende da k), e questo avviene in corrispondenza del rapporto capitale-lavoro pari a k* dove le due curve si intersecano.
Inoltre, poiché $f''(k) < 0$, le due curve non si intersecheranno una seconda volta.
Se l'economia dovesse trovarsi a destra di k*, l'economia sarebbe in una situazione in cui il risparmio consentirebbe un investimento effettivo inferiore all'investimento di break-even, per cui il capitale per addetto tenderebbe a diminuire e l'economia convergerebbe verso k*. Sia che l'economia si trovi a sinistra o a destra di k*, il capitale per addetto tenderà a convergere a k*.
L'economia tende, nel lungo periodo, a convergere ad un rapporto capitale-lavoro pari a k*.
Il rapporto capitale-lavoro k* è noto come rapporto capitale lavoro di *stato stazionario*. Più in generale, **nel Modello di Solow l'economia converge ad un *sentiero di crescita bilanciata*** –una situazione in cui ogni variabile del modello sta crescendo ad un tasso costante.
Cosa succeda alle principali variabili macroeconomiche in stato stazionario

- L'ammontare di lavoratori L cresce al tasso n
- Lo stock di capitale K è uguale, a Lk, per cui in k*, k, lo stock di capitale per addetto, non varia, pertanto K crescerà al tasso n.
- Se L e K crescono al tasso n, anche Y crescerà al tasso n (rendimenti costanti di scala).
- Di conseguenza, y, l'output per addetto, sarà costante.

Pertanto, **il Modello di Solow implica** che, indipendentemente dal rapporto capitale-lavoro di partenza, l'economia converge ad un tasso di crescita bilanciato dove il capitale per addetto e il prodotto per addetto sono costanti.
Matematicamente, il capitale per addetto di equilibrio può venire calcolato, una volta specificata una forma funzionale per la funzione di produzione (di solito la Cobb-Douglas,), ponendo a zero il lato sinistro dell'equazione 3.14.
Aggiunte di capitale generano incrementi di prodotto via via inferiori, fino ad un punto in cui l'investimento effettuato nell'economia utilizzando il risparmio non è sufficiente ad equipaggiare i lavoratori con uno stock di capitale costante.
Rinviando la trattazione matematica al Modello di Solow con progresso tecnico, possiamo vedere, **graficamente, l'effetto di un incremento nel tasso di risparmio**.
Consideriamo la Figura 3.2, che è equivalente alla Figura 3.1, ma dove abbiamo rappresentato graficamente l'effetto di un aumento del tasso di risparmio *s*. **Figura 3.2 PAG 33**
La curva che indica l'investimento effettivo è traslata verticalmente, in quanto l'economia risparmia (e quindi investe) un ammontare più elevato di risorse. Vediamo la dinamica che caratterizza l'incremento del tasso di risparmio da s1 a s2. Inizialmente l'economia si trova in una situazione di stato stazionario in k*. Successivamente all'incremento nel tasso di risparmio, l'investimento effettivo supera l'investimento di break-even (il maggior risparmio fa si che l'economia investa più risorse di quanto sarebbe necessario per mantenere k costante): k tende pertanto a crescere e, con esso, il prodotto per addetto, il che implica un tasso di crescita positivo nel prodotto per addetto.
Tuttavia, il capitale ha rendimenti decrescenti, il che implica che, progressivamente, l'economia convergerà ad un nuovo equilibrio di stato stazionario, in corrispondenza di un rapporto capitale-prodotto più alto (k**), e di un prodotto pro-capite più elevato. Una volta giunti a k**, tuttavia, k non cresce più, e con esso il prodotto pro capite, per cui l'effetto dell'incremento del tasso di

risparmio sul tasso di crescita del prodotto pro-capite è solo **temporaneo**. Nel lungo periodo l'output pro-capite è più elevato, ma il tasso di crescita del prodotto pro-capite è nuovamente uguale a zero.
In altre parole, aumentare il tasso di risparmio può far crescere il prodotto pro-capite solo temporaneamente. Inoltre, siccome s<1, **non è possibile** per una economia incrementare il prodotto pro capite aumentando in più fasi il tasso di risparmio.
Data l'esistenza di rendimenti decrescenti del capitale, affinché il prodotto pro capite cresca ad un tasso positivo occorrerebbe che il capitale per addetto crescesse più velocemente della produzione per addetto, il che implicherebbe che l'economia dovrebbe allocare una quota sempre maggiore di prodotto all'accumulazione di capitale, ma ad un certo punto non ci sarà più prodotto da destinare all'accumulazione di capitale.
Se vogliamo spiegare il processo di crescita economica, occorre pertanto modificare questa versione semplificata del Modello di Solow. In particolare, occorre "permettere" al livello del prodotto, di crescere non solo attraverso il capitale e il lavoro. Attribuendo nel Modello un ruolo al progresso tecnico.

Progresso tecnico: definizioni e tipologie PAG 36

L'elemento principale di insoddisfazione del Modello di Solow è che l'economia converge ad un equilibrio in cui il prodotto pro-capite, il rapporto capitale-lavoro e il consumo per persona sono costanti. Ciò è sconfortante, in quanto implica che gli standard di vita non salgono, ma appare anche in contraddizione con alcuni "fatti stilizzati", ovverosia regolarità empiriche identificate nei primi anni sessanta dall'economista inglese Kaldor. Kaldor identificò, per una serie di paesi, una serie di regolarità empiriche, alcune delle quali sarebbero contraddette dalla versione del Modello di Solow.
Kaldor riscontrò che:

1. Il prodotto per occupato è cresciuto a tassi sostanzialmente costanti nel corso dell'ultimo secolo senza alcuna tendenza a diminuire;
2. Il rapporto capitale lavoro è anch'esso cresciuto nel corso del tempo, ad un tasso simile a quello del prodotto per occupato;
3. Di conseguenza, il rapporto capitale-prodotto è rimasto sostanzialmente costante nel corso del tempo;
4. Il salario reale è cresciuto nel corso del tempo;
5. La quota dei salari e del capitale sul totale del reddito è rimasta pressoché costante nel corso del tempo;
6. Il tasso di rendimento del capitale è rimasto sostanzialmente costante nel corso del tempo;
7. Il tasso di crescita del capitale per occupato differisce sostanzialmente fra paesi.

Tipologie di progresso tecnico: fondamentalmente due grandi categorie di progresso tecnologico:

1. Introduzione di nuovi prodotti, di prodotti di qualità migliore o di una maggior varietà di prodotti (**innovazione di prodotto**);
2. Miglioramenti nel modo di produrre prodotti già esistenti, sia grazie alla tecnologia che grazie a migliori procedure organizzative (**innovazione di processo**), che consentono di ottenere più prodotto da un certo ammontare di input.

Sebbene qualitativamente diverse, le innovazioni di processo e di prodotto possono essere considerate congiuntamente. Le **innovazioni di processo** hanno la caratteristica di consentire di produrre un dato prodotto a costi minori, utilizzando cioè una quantità minore di almeno un fattore produttivo, le **innovazioni di prodotto** consentono l'introduzione di nuovi beni, che prima erano irrealizzabili. Queste ultime possono, essere ricondotte alle prime in quanto un nuovo prodotto può essere visto come un prodotto la cui realizzazione avrebbe richiesto quantità tali di input da renderla impraticabile e che solo un'innovazione di processo ha permesso di ridurre la quantità di inputs necessarie per realizzare il prodotto. Il passaggio dal disco in vinile al CD.
Occorre notare che, se da un lato alcune innovazioni sono frutto di scoperte casuali, altre sono la conseguenza di attività specifica volta alla "scoperta" di innovazioni (spesa in R&S), portata avanti nei laboratori delle università, degli enti di ricerca e delle aziende.

Le innovazioni e, quindi, il progresso tecnologico, possono assumere varie forme: **Innovazioni risparmiatrici di lavoro**: quando permette di ridurre la quantità di lavoro (relativamente alla quantità di capitale) necessaria per produrre un certo ammontare di bene ottenibile da una data funzione di produzione; **Innovazioni risparmiatrici di capitale**: quando permette di ridurre la quantità di capitale (relativamente alla quantità di lavoro) necessaria per produrre un certo ammontare di bene ottenibile da una data funzione di produzione; **Innovazioni neutrali**: le innovazioni che non riducono un input relativamente più dell'altro nel processo produttivo.

Inserimento del progresso tecnico nella funzione di produzione PAG 38

Il modo più semplice per incorporare il progresso tecnico nel Modello di Solow è quello di "inserire" il progresso tecnico nella funzione di produzione, di modo che variazioni nel livello della tecnologia indotte dal progresso tecnologico determino incrementi nel livello dell'output ottenibili da una certa combinazione di capitale e lavoro.

Ad esempio, una funzione di produzione incorporante il progresso tecnico potrebbe essere scritta nel modo seguente: $Y(t) = F(K(t), L(t), A(t))$ (4.1)

La definizione di progresso tecnico neutrale dipende dal significato preciso che attribuiamo al concetto di risparmiatore di lavoro o risparmiatore di capitale.

Storicamente, tre definizioni di progresso tecnico neutrale sono state avanzate. **Hicks (1932)** considera un'innovazione tecnologica come neutrale quando mantiene inalterato il rapporto fra i prodotti marginali del lavoro e del capitale, per un certo rapporto capitale-lavoro. Questa definizione di progresso tecnico neutrale corrisponde, in pratica, ad una rinumerazione degli isoquanti. Una Funzione di produzione caratterizzata da progresso tecnico neutrale secondo Hicks può essere scritta come: $Y(t) = F(K(t), L(t), B(t)) = B(t)F(K(t), L(t))$ (4.2)

***B*(*t*)** è l'indice che rappresenta il livello della tecnologia. **Figura 4.1. Progresso tecnico Neutrale secondo Hicks** PAG 40 Nella figura 4.1 La retta K/L è il luogo dei punti cui il rapporto capitale-lavoro è costante. Le linee in rosso sono gli isoquanti della funzione di produzione. Nel caso di progresso tecnico neutrale, i punti E1 e E2, caratterizzati dallo stesso rapporto capitale-lavoro, gli isoquanti hanno la stessa pendenza: in E2 è possibile produrre la stessa quantità di output che in E1 usando esattamente la metà sia di lavoro che di capitale: l'innovazione è stata tale da aumentare la produttività marginale dei due fattori nella stessa misura (per cui la pendenza degli isoquanti è rimasta costante). **Il progresso tecnico neutrale ha la caratteristica di determinare uno spostamento della funzione di produzione verso l'alto per un dato rapporto capitale-lavoro**.

Un'innovazione è definita risparmiatrice di lavoro nel senso di Hicks se, in conseguenza di essa, la produttività marginale del lavoro aumenta meno di quella del capitale (ad un dato rapporto capitale lavoro) e **risparmiatrice di capitale** se la produttività marginale del capitale aumenta meno di quella del lavoro (ad un dato rapporto capitale prodotto). La **Figura 4.2** ne dà un'illustrazione grafica. **Progresso tecnico risparmiatore di lavoro e di capitale** PAG 41

Progresso tecnico neutrale secondo Harrod (1942): un'innovazione è neutrale, nel senso di Harrod, se lascia inalterato il rapporto fra le quote distributive di capitale e lavoro, per un dato rapporto capitale-prodotto. Una funzione di produzione caratterizzata da progresso tecnico neutrale nel senso di Harrod può essere scritta come: $Y(t) = F(K(t), B(t)L(t))$ (4.3)

***B*(*t*)** è l'indice rappresentativo della tecnologia. Questa forma di progresso tecnico è anche nota come "**labour augmentig**" o accrescitiva del lavoro perché tende ad incrementare il prodotto in modo equivalente ad un incremento nella quantità di lavoro.

Figura 4.3: **Progresso tecnico neutrale nel senso di Harrod** PAG 42 Abbiamo rappresentato la funzione di produzione scritta in forma intensiva. In conseguenza della innovazione, la funzione di produzione si trasla versa l'alto. L'innovazione è neutrale nel senso di Harrod in quanto in P0 e P1 (che si trovano sullo stesso raggio dall'origine, e quindi sono caratterizzati dallo stesso rapporto capitale-prodotto) la pendenza delle funzioni di produzione (la vecchia e la nuova) sono uguali. Pertanto, anche il prodotto marginale del capitale e, quindi, il prezzo del capitale, sono uguali in P0 e P1 . Siccome il rapporto K/Y è costante, ne segue che il rapporto PMk*K/Y, vale a dire la quota distributiva spettante al capitale è uguale in P0 e P1 e quindi anche la quota spettante ai salari e

quindi anche il rapporto fra le quote distributive, come richiesto dalla definizione di neutralità proposta da Harrod (PMk = il prodotto marginale del capitale è dato dalla pendenza della funzione di produzione scritta in forma intensiva).

La terza definizione di neutralità è proposta da Solow (1969), che definisce una innovazione neutrale quando è tale da lasciare inalterato il rapporto fra le quote distributive per un dato rapporto lavoro-prodotto. La funzione di produzione può essere scritta come: $Y(t) = F(S(t)K(t),L(t))$ (4.4)

S(t) è l'indice rappresentativo della tecnologia. Questa forma di progresso tecnico è nota come "**capital augmenting**" o accrescitiva del capitale, in quanto tende ad incrementare il prodotto in modo equivalente ad un incremento nella quantità di capitale.

Solitamente, in Teoria della Crescita si assume che il **progresso tecnico sia del tipo neutrale nel senso di Harrod**, e questo per essenzialmente tre motivi:

1) Per una ragione di convenienza, essendo l'unica forma di progresso tecnico neutrale tale da consentire che nel Modello di Solow (e anche in altri simili modelli) l'economia converga ad un sentiero di crescita bilanciata.
2) Perché sembra meglio "rispettare" i fatti stilizzati di Kaldor, in quanto il progresso tecnico neutrale è consistente con quote distributive e rapporto capitale-prodotto costanti.
3) Inoltre, recenti ricerche empiriche hanno mostrato che l'attività di R&S portata avanti da molte imprese è tale da generare progresso tecnico del tipo neutrale nel senso di Harrod.

Il modello di Crescita di Solow con progresso tecnico - La funzione di produzione PAG 44

Consideriamo una funzione di produzione del seguente tipo: $Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$ (5.1)

L'equazione 5.1 è simile all'equazione 3.1. L'unica differenza è la presenza del termine A(t). **A(t)** rappresenta il progresso tecnologico che è assunto essere Neutrale nel senso di Harrod (o "labour augmenting). IL termine **AL** è chiamato "lavoro efficiente". Questa forma di progresso tecnico è quella che sembra corrispondere meglio ad alcuni fatti stilizzati identificati da Kaldor, fra i quali la costanza del rapporto fra capitale e prodotto. Scriviamo: F(K/AL, 1) = 1/AL F(K, L). 1/AL F(K, L) non è altro che il prodotto per lavoratore efficiente e K/AL è il rapporto capitale/lavoro efficiente e indica l'intensità di capitale della tecnologia produttiva. Chiamiamo k = K/AL, y = Y/AL e $f(k) = F(k,1)$. Scriviamo: $y = f(k)$ (5.2)

L'equazione 5.2 esprime il prodotto per lavoratore come funzione del capitale per lavoratore efficiente. L'ammontare totale di output nell'economia può essere calcolato moltiplicando il lato destro dell'equazione 5.2 per AL: $Y = ALf(k)$.

Le ipotesi alla base del Modello di Solow con progresso tecnico sono molto simili a quelle nel caso senza progresso tecnico. NB: k ora indica il capitale per unità di lavoro efficienti, invece che il rapporto fra capitale ed unità di lavoro, come accadeva nel caso senza progresso tecnico.

Ipotesi 2: si assume che la funzione di produzione soddisfa le seguenti condizioni: $f(0) = 0$; $f'(k) > 0$; $f''(k) < 0$. Possiamo notare che anche in questo caso $f'(k)$ è il prodotto marginale del capitale. Infatti, sappiamo che $F(K, AL) = ALf(k)$. Per cui, $\frac{\partial F(K,AL)}{\partial K} = \frac{\partial AL\, f(K/AL)}{\partial K}$ = AL f'(k) 1/AL = f'(k).

Per cui $f''(k) < 0$ implica che il prodotto marginale del capitale è positivo ma decrescente, cioè diminuisce quando il rapporto capitale-lavoro efficiente sale. La **produttività marginale del lavoro**, scritta **in forma intensiva**, sarà: $\frac{\partial F(K,AL)}{\partial L} = \frac{\partial AL\, f(K/AL)}{\partial L}$ = Af(k) + Af'(k)K(-1/AL^2) = Af(k) – Af'(k) = A[f(k) – kf'(k)]

Ipotesi 3: Valgono le condizioni di Inada (vedi Modello di Solow senza progresso tecnico).

La funzione di produzione Cobb-Dougas può essere scritta nel caso in cui il progresso tecnico sia neutrale nel senso di Harrod, come: $Y = K^a (AL)^{1-\alpha}$, $0 < a < 1$ (5.3)

Evoluzione degli inputs nel tempo PAG 45

In questa versione del Modello di Solow, il prodotto Y varia nel tempo sia perché variano gli inputs capitale e lavoro ma anche perché varia lo stato della tecnologia, ovvero per effetto del progresso tecnico. Dobbiamo pertanto specificare come variano il capitale, il lavoro e il progresso tecnico.

Fattore lavoro Nel caso del fattore lavoro, assumiamo che cresca ad un tasso costante: $\dot{L}(t) = nL(t)$ (5.4)

Stato della tecnologia Come nel caso del fattore lavoro, assumiamo che lo stock di conoscenza che definisce il livello della tecnologia cresca ad un tasso costante g: $\dot{A}(t) = gA(t)$ (5.5)

Da cui ne segue, come nel caso del fattore lavoro, che A cresce esponenzialmente al tasso g.

Fattore capitale Valgono la equazione 3.11, e le ipotesi 3.5-7.

Vale l'equazione 3.11, che riscriviamo qua come equazione 5.6: $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$ (5.6)

Soluzione del Modello PAG 46

Ricordandoci che k= K/AL, possiamo scrivere il tasso di variazione del capitale per lavoratore come: $\dot{k}(\mathrm{t}) = \frac{\dot{k}(\mathrm{t})}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}[\mathrm{A(t)}\dot{L}(\mathrm{t}) + \mathrm{L(t)}\dot{A}(\mathrm{t})]$ (5.7)

Ricordando che $\dot{k}(\mathrm{t})$ è dato dalla 5.6, che $\dot{L}(\mathrm{t})$ e $\dot{A}(\mathrm{t})$ sono uguali a n e g, rispettivamente, possiamo riscrivere la 5.7 come: $\dot{k}(\mathrm{t}) = \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)n - k(t)g = sf(k) - k(n + \delta + g)$ (5.8)

L'equazione 5.8 è l'equazione corrispondente alla 3.14. L'analisi della dinamica sottostante l'equazione 5.8 è la stessa di quella che abbiamo svolto nel caso del Modello senza progresso tecnico.

Figura 5.1 PAG 47 NB: In Figura 5.1 $\theta = n + g$

L'unica differenza con l'analisi svolta nel caso precedente è che ora k rappresenta il capitale per unità di lavoro efficiente e che l'investimento di break-even è pari a $k(n + \delta + g)$.

Affinché k non diminuisca, occorre realizzare un certo ammontare di investimenti nell'economia, in quanto, da un lato, poiché il lavoro efficiente cresce al tasso n+g, occorre che lo stock aggregato di capitale cresca anch'esso al tasso n+g; secondariamente, poiché esiste deprezzamento, occorre investire affinché i lavoratori non siano equipaggiati con un capitale che stia man mano perdendo valore. Indipendentemente dalla posizione di partenza, anche nel caso di un'economia con progresso tecnico positivo l'economia tenderà a convergere ad un certo rapporto capitale-lavoro efficiente in corrispondenza del quale l'investimento effettuato nell'economia sarà uguale all'investimento di break-even e quindi il rapporto capitale-lavoro efficiente non tenderà a cambiare, come nel caso di assenza di progresso tecnico.

Il comportamento della principali variabili macroeconomiche in stato stazionario notiamo alcune significative differenze:

- L'ammontare di lavoratori L cresce al tasso n
- Lo stato della tecnologia cresce al tasso g
- Lo stock di lavoro efficiente cresce al tasso n+g
- Lo stock di capitale K è uguale, per definizione, a ALk, per cui, in stato stazionario(cioè in k*) k, lo stock di capitale per lavoratore efficiente non varia, per cui K crescerà al tasso n+g.
- Se L e K crescono al tasso n+g, anche Y crescerà al tasso n+g (rendimenti costanti di scala).
- Di conseguenza, y, l'output per addetto, crescerà al tasso n+g-n=g. Infatti, il tasso di crescita del prodotto per occupato (Y/L) può essere scritto come: $\frac{\dot{Y/L}}{Y/L} = g + \frac{f'(k)}{(f(k)/k)}\dot{k}/\mathrm{k}$ per cui in stato stazionario $\frac{\dot{Y/L}}{Y/L} = g$
- Il rapporto K/Y è costante, in quanto sia K che Y crescono al tasso n+g
- Il rapporto K/L cresce al tasso n+g-n=g, per cui dovremo assistere ad un progressivo intensificarsi del grado di intensità di capitale della produzione.
- Il prezzo del capitale, cioè il prodotto marginale del capitale, $f'(k)$ è costate.
- Il salario $w = A[f(k) - kf'(k)]$ cresce al tasso g, cioè al tasso di crescita del progresso tecnologico.

- Il tasso di crescita del prodotto in unità di lavoro efficiente può essere scritto, in termini di tasso di crescita del prodotto per unità di lavoro efficiente come: $\frac{\dot{y}}{y} = \frac{f'(k)}{(f(k)/k)} \frac{\dot{k}}{k}$

Il messaggio più importante è che il prodotto pro-capite cresce ad un tasso pari a quello del progresso tecnologico, che peraltro è assunto esogeno, cioè non è spiegato dal modello. Possiamo ora esaminare in modo più rigoroso **l'impatto di una variazione del tasso di risparmio sulle principali variabili macroeconomiche**: qualitativamente le nostre conclusioni non cambieranno rispetto al modello senza progresso tecnico: inizialmente l'economia cresce ad un tasso superiore a quello di stato stazionario, proprio perché in seguito ad un aumento del risparmio l'investimento effettivo eccede quello di break-even, per cui k tende a crescere. Tuttavia, al crescere di k i rendimenti marginali decrescenti continuano a prevalere, per cui l'economia tende ad un nuovo equilibrio con un rapporto capitale/lavoro efficiente più alto, un prodotto per occupato più alto ma un tasso di crescita pari nuovamente a quello (esogeno) dato dal progresso tecnologico. Possiamo riassumere i principali effetti di un incremento del risparmio nelle Figura 5.2-7

Figura 5.2: Tasso di risparmio PAG 50
Figura 5.3: Capitale per unità di lavoro efficiente PAG 50
Figura 5.4: Variazione nel rapporto capitale-unità di lavoro efficiente
Figura 5.5: Tasso di crescita del prodotto pro-capitale PAG 51
Figura 5.6: Logaritmo del prodotto pro-capite PAG 51
Figura 5.7: Consumo PAG 51

Il **riquadro riepilogativo** e le **Figure 5.2-7** ci dicono alcune cose interessanti: **1)** dopo l'incremento nel tasso di risparmio, l'investimento effettivo eccede quello di breakeven, per cui il capitale per unità di lavoro efficiente cresce e continua a farlo finché successive aggiunte di capitale sono via via meno "produttive" e l'economia raggiunge il nuovo capitale per unità di lavoro efficiente di equilibrio: la Figura 5.3 mostra proprio: k sale dopo t_0, ma infine si stabilizza ad un livello più elevato. **2)** Il prodotto pro-capite Y/L è uguale ad Af(k), per cui, in stato stazionario, cresce al tasso di A, cioè g: tuttavia, nella fase di transizione da uno stato stazionario all'altro, cresce perché anche f(k) cresce, per cui cresce ad un tasso superiore a g (la Figura 5.5 mostra che, in t_0, la curva del tasso di crescita del prodotto pro-capite "fa un salto" verso l'alto): tuttavia, quando k cessa di cresce, l'unico contributo alla crescita del prodotto pro-capite viene da A, per cui il tasso di crescita del PIL pro-capite torna ad essere uguale a g: la Figura 5.6 ci mostra che però, in conseguenza del più altro tasso di risparmio nell'economia, il livello del prodotto pro-capite è più elevato in modo permanente. L'aumento nel tasso di risparmio non ha effetti permanenti sul tasso di crescita del prodotto pro-capite ma solo sul suo livello: nel modello di Solow, solo incrementi nel tasso di crescita del progresso tecnologico hanno effetti permanenti sul tasso di crescita del prodotto pro-capite. **3)** Impatto sul consumo: l'impatto sul consumo è ambiguo. Infatti, possiamo definire il consumo per unità di lavoro efficiente come $c=(1-s)\, f\,(k)$ (Vedi Figura 5.1) . In seguito all'aumento di s, il consumo per unità di lavoro efficiente diminuisce. Dopo di che, dato che il prodotto pro-capite cresce fino a stabilizzarsi ad un livello permanentemente più elevato di quello pre-incremento del tasso di risparmio, il consumo per unità di lavoro efficiente comincia a crescere (Figura 5.7). Per capire se crescerà sufficientemente da controbilanciare l'incremento nel tasso di risparmio o se invece rimarrà inferiore o, addirittura, superiore, dobbiamo fare alcuni calcoli: noi sappiamo che c è uguale all'output per unità di lavoro efficiente meno il risparmio per unità di lavoro efficiente $c = f(k) - sf(k)$. In stato stazionario, il risparmio effettivo $sf\,(k)$ eguaglia l'investimento di break-even, il che ci permette di scrivere che: $c^* = f\,(k^*) - (n+g+\delta)k^*$ (5.9) Dove un * indica il valore della variabile in stato stazionario.

Effetti sull'output nel lungo periodo: il **messaggio principale del Modello di Solow è** che la sola crescita del progresso tecnologico ha importanza nel determinare il tasso di crescita del prodotto pro-capite, mentre risparmiare, e quindi investire, più risorse avrebbe solo effetti temporanei sul tasso di crescita del prodotto pro-capite. Cosa significa temporanei, vale a dire, per quanto tempo una crescita nel tasso di risparmio (e quindi di investimento) porta ad un incremento nel tasso di

crescita del prodotto pro-capite maggiore di quello indotto dal tasso di crescita del progresso tecnologico. Possiamo condurre un tipo di analisi simile a quello condotto nel caso del consumo: definiamo il prodotto per unità di lavoro efficiente come: $y^* = f(k^*)$, dove k* è il capitale per unità di lavoro efficiente. Ricordandoci che lo stock di capitale per unità di lavoro efficiente di stato stazionario è funzione di n, g, s e δ, possiamo calcolare l'impatto di lungo periodo di un incremento di s su y* come: $\frac{\partial y*}{\partial s} = f'(k^*) \frac{\partial k*(n,g,s,\delta)}{\partial s}$ (5.10)

Riassumendo PAG 56

1. Il **Modello di Solow predice che** il tasso di crescita di lungo periodo del prodotto pro-capite dipende unicamente dal progresso tecnologico (che è assunto esogeno), in quanto il capitale è caratterizzato da rendimenti decrescenti.

2. Una maggior accumulazione di capitale, indotta da un più elevato tasso di risparmio, ha effetti solo temporanei sul tasso di crescita del prodotto pro-capite.

3. Una maggior accumulazione di capitale indotta da un più elevato tasso di risparmio ha solo un effetto sul livello del prodotto pro-capite, che tuttavia è relativamente modesto (un incremento nel tasso di risparmio del 10% induce un incremento del 5% del prodotto pro-capite) e che richiede un tempo relativamente lungo per dispiegare i propri effetti.

Il Modello di Solow e la realtà PAG 58

Il modello di Solow identifica due possibili **ragioni per l'esistenza di differenze** (nel tempo o fra paesi) nel livello del prodotto per lavoratore:

- **Differenze nel rapporto capitale/lavoro**
- **Differenze nel livello della tecnologia**

Tuttavia, nel modello di Solow solo differenze nel livello della tecnologia possono davvero spiegare le differenze che osserviamo nel livello del prodotto pro-capite fra paesi ricchi e poveri. Esistono infatti due problemi se vogliamo attribuire, nel Modello di Solow, alle differenze nel rapporto capitale/lavoro le differenze esistenti nel prodotto pro-capite di diversi paesi.

Pertanto, se il Modello di Solow è corretto, differenze nel capitale per lavoratore non possono spiegare le differenze nel prodotto pro-capite (e nella produttività del lavoro) che osserviamo nella realtà. Dobbiamo perciò attribuire il grosso delle differenze esistenti nel prodotto pro-capite al livello della tecnologia.

Ma quale è il trattamento della tecnologia nel modello di Solow?

Nel Modello di Solow il trattamento della tecnologia è esogeno: vale a dire non è spiegato nel modello. In altre parole, si vede che l'accumulazione di capitale non può spiegare la crescita di lungo periodo né le differenze fra paesi nel livello del prodotto pro-capite e quindi si introduce il progresso tecnologico, sotto forma di efficienza del lavoro impiegato nel processo produttivo, ma non si spiega esattamente che cosa stimoli il progresso tecnologico.

- Si potrebbe assumere che il livello della tecnologia (A) rappresenti il "*sapere astratto*", le competenze scientifico-matematico-ingegneristiche di una nazione. Occorrerebbe però spiegare come A cresce nel tempo e perché imprese in diversi paesi abbiano accesso a più conoscenze astratte che in altri paesi. Ovviamente, se i paesi "poveri" hanno livelli di A inferiori rispetto ai paesi ricchi, allora i paesi poveri potrebbero raggiungerei livelli di prodotto pro-capite dei paesi ricchi "imitando" la tecnologia di questi ultimi e quindi pervenendo ad un livello di reddito pro-capite simile a quello dei paesi ricchi. Tuttavia, se le differenze nella tecnologia fossero la principale determinante della differenza nel reddito pro-capite, si dovrebbe spiegare perché i paesi poveri non riescano a "imitare" velocemente le tecnologie dei paesi ricchi e a convergere, rapidamente, al loro livello di reddito pro-capite. La spiegazione potrebbe risiedere nel fatto che non è sufficiente avere a disposizione la tecnologia più avanzata, occorre che i paesi poveri siano in grado di utilizzare la tecnologia, il che ci rimanda alla nozione di capitale umano
- Alternativamente, si potrebbe pensare che il capitale non sia costituito solo da capitale fisico, ma che altre forme di capitale, come il capitale umano, abbiano importanza. In questo caso, i calcoli che abbiamo fatto, basati sul fatto che l'importanza del capitale è data dal rendimento

marginale del capitale, sarebbero sbagliati, e occorrerebbe correggere il modello in modo appropriato.

Convergenza

Il modello di **Solow** ha una importante implicazione: **il prodotto pro-capite dei paesi poveri dovrebbe crescere di più rispetto a quello dei paesi ricchi**. Questo per tre motivi:

1. Il Modello di Solow prevede che i paesi convergono al tasso di crescita bilanciato dato dal tasso di crescita della tecnologia, supposto uguale nei diversi paesi. Perciò, se due paesi che hanno accesso allo stessa tecnologia, hanno lo stesso tasso di risparmio, di deprezzamento e di forza lavoro "partono" da livelli di prodotto diversi –il che implica un diverso rapporto capitale/lavoro- il paese povero dovrebbe convergere al livello di reddito pro-capite del paese ricco. Infatti, la equazione 5.8 implica che $K_i / K_i - (K_j/K_j) = s[(f'(k_i)/ k_i)-(f'(k_j)/ k_j)]>0$, se $k_i< k_j$, per la concavità della funzione di produzione. Il che ci dice che il capitale per unità di lavoro efficiente e quindi il prodotto per occupato cresceranno più velocemente nel paese che parte da un livello di capitale per occupato più basso.

2. Il Modello di Solow implica che il tasso di rendimento del capitale è maggiore in paesi poveri, in quanto più basso è il loro stock di capitale, e quindi più alto è il prodotto marginale del capitale: ci sono cioè incentivi per il capitale a trasferirsi nei paesi poveri, il che costituisce un altro motivo per attendersi una convergenza nei livelli del prodotto pro capite.

3. Nella misura in cui le differenze nel prodotto pro-capite derivano da differenze nel livello della tecnologia, allora i paesi poveri potrebbero imitare la tecnologia adottata nei paesi ricchi ed avere quindi un tasso di crescita della tecnologia maggiore che nei paesi ricchi, il che implica ancora un volta un processo di convergenza nei livelli del prodotto pro-capite.

Applicazioni empiriche: contabilità della crescita PAG 63

Come si può **stimare e calcolare il tasso di crescita del progresso tecnologico**, **e** come possiamo calcolare **il contributo che la crescita del progress tecnologico fornisce al tasso di crescita del prodotto per lavoratore**? Una seconda possibilità è utilizzare una metodologia conosciuta come ***Contabilità della Crescita*** In contabilità della crescita, generalmente si assume che il progresso tecnico sia di tipo Neutrale secondo Hicks. Per cui si assume l'esistenza di una funzione di produzione del tipo: $Y(t) = B(t)F(K(t), L(t))$ (6.2)

Dopo opportuni passagi possiamo ricavare il tasso di crescita del progresso tecnologico neutrale secondo Hicks: $B/B = (\dot{Y}/Y) - (\dot{L}/L) - \alpha_k ((\dot{K}/K) - (\dot{L}/L))$ (6.6) che è anche detta **RESIDUO DI SOLOW.**

L'equazione 6.6 ci mostra che è possibile **calcolare il tasso di crescita del progresso tecnologico neutrale secondo Hicks** come differenza fra il tasso di crescita del prodotto per lavoratore (o produttività del lavoro) e il tasso di crescita del rapporto capitale-prodotto (NB: Nel Modello di Solow, l'accumulazione di capitale può influenzare il tasso di crescita del prodotto per occupato nel breve periodo) moltiplicato per l'elasticità del prodotto rispetto al capitale. Il progresso tecnologico è anche noto come tasso di crescita della Produttività Totale dei Fattori (TFP), in quanto è derivabile, tramite opportune manipolazioni della 6.5, come media pesata del tasso di crescita della produttività del lavoro (Y/L) e della produttività del capitale (Y/K), dove i pesi sono dati dalle quote distributive di lavoro e capitali. Se valgono le ipotesi di concorrenza perfetta, il capitale è remunerato al prodotto marginale, per cui $K\alpha$ rappresenta la quota del prodotto distribuita al fattore capitale, per cui $K\alpha$ può essere calcolata utilizzando i dati di contabilità nazionale sulla quota di reddito distribuito al capitale. Calcolato $K\alpha$, è sufficiente avere dati relativi a Y, K e L per ottenere una stima del progresso tecnico neutrale secondo Hicks, che può quindi essere ottenuto come un residuo, in quanto (come possiamo vedere dall'equazione 6.6) esso non è altro che la componente del tasso di crescita del prodotto per lavoratore che non è spiegato dal tasso di crescita del capitale per lavoratore. Il progresso tecnico neutrale secondo Hicks, quando calcolato tramite l'equazione 6.6 è anche noto come ***Residuo di Solow***, essendo stato proposto come misura del progresso tecnologico da Robert Solow.

Pertanto la 6.6 ci dà una misurazione corretta del progresso tecnologico (neutrale secondo Hicks)

quando:
1) La tecnologia abbia rendimenti costanti di scala (altrimenti, in presenza di crescita dell'output, se i rendimenti di scala fossero crescenti, assisteremmo ad una crescita meno che proporzionale degli inputs, e questo verrebbe "scambiato" per progresso tecnologico (un *Residuo* più grande): ad esempio, in anche in assenza di progresso tecnologico, in presenza di rendimenti crescenti di scala le quote distributive degli inputs non sarebbero equivalenti alle elasticità dell'output rispetto ai vari inputs, e quindi si finirebbe per calcolare un residuo di Solow positivo anche in assenza di progresso tecnico
2) Valgano le ipotesi di concorrenza perfetta, di modo che si possano usare le quote distributive al posto dell'elasticità del prodotto rispetto al capitale.
3) Occorre che non vi siano importanti errori di misurazione degli inputs o che importanti inputs non vengano omessi, altrimenti il loro effetto sulla crescita dell'output verrebbe colta dal residuo e, quindi, scambiata per progresso tecnologico. Analogamente, non dovrebbero esservi effetti ciclici.
4) Non devono esservi "esternalità": se il rendimento "sociale" dell'investimento eccede quello privato, la quota del capitale sul valore aggiunto sottostimerebbe l'elasticità del capitale e quindi il ruolo della TFP nello spiegare il tasso di crescita dell'output per lavoratore verrebbe sovrastimato.
Limiti della contabilità della Crescita PAG 74
1) Gli esercizi di contabilità della crescita dipendono dalle modalità di misurazione del capitale.: se il tasso di crescita del capitale è sovrastimato, ad esempio, il tasso di crescita del TFP è sottostimato. **Problemi nella misurazione del capitale**: **a)** ruolo della qualità dei beni capitali (ad esempio, un laptop costa più o meno uguale oggi o dieci anni fa, ma oggi è molto più potente e veloce, per cui il suo prezzo-se aggiustato per la qualità- sarebbe sceso: se si trascura questo aggiustamento (come di solito si fa), si tende a sovrastimare la crescita della TFP nei settori utilizzatori di beni capitali (esempio settore delle linee aeree) e a sottostimarla in quelli produttori di beni capitali (esempio produttori di aerei), ma a livello aggregato l'effetto dovrebbe tendere a cancellarsi; **b)** in molti paesi si tende a sovrastimare la crescita del capitale di anno in anno (ad esempio fondi spesi per investimenti pubblici, ad esempio in ponti, che si perdono in corruzione, spreco, ecc, e non in investimento in capitale fisico). **2)** La contabilità della crescita ci permette di scomporre la crescita del prodotto in crescita derivante dagli inputs e in crescita derivante dal produttività totale dei fattori. Tuttavia non ci dice perché, in un certo periodo storico, la contribuzione di uno dei fattori è cresciuto o diminuito. **3)** Il ciclo economico influenza le misure di produttività che possiamo calcolare tramite la Contabilità della Crescita (ad esempio, in recessione, sia il fattore capitale che i fattore lavoro non sono pienamente utilizzati.