STRUMENTI MATEMATICI PER L'ECONOMIA
2005

1)

1.1) Si considerino le variabili aleatorie X e Y . Siano $F_X(.)$ e $F_Y(.)$ le rispettive funzioni di ripartizione di X e di Y. Scrivere la definizione di dominanza stocastica di X su Y (cioè X deve dominare stocasticamente Y) del 1° ordine e del 2° ordine.

1.2) Sono date :

$$X \begin{cases} 12 & \frac{3}{4} \\ 100 & \frac{1}{4} \end{cases} \quad ; \qquad Y \begin{cases} 20 & \frac{3}{4} \\ 96 & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Stabilire se X domina stocasticamente Y ai sensi della dominanza stocastica del 1° ordine. Motivare la risposta.

2)

E' data la seguente equazione alle differenze finite <u>completa a coefficienti costanti</u>:

(*) $\varphi(E)y(x)= g(x)$,

dove E è l'operatore spostamento e $\varphi(E)$ è un operatore polinomiale.

2.1) Scrivere l'equazione omogenea ad essa associata;
scrivere l'equazione caratteristica associata alla suddetta equazione omogenea.

2.2) Trovare la soluzione generale della seguente equazione:

$$y(x+2) - 36f(x) = 70x, \quad x=0,1,2,......$$

3)

3.1) Sia $\{W(t),\ t\in[0,+\infty[\ \}$ un processo stocastico. Enunciare le 4 proprietà che esso deve soddisfare per essere un <u>processo di Weiner</u> . Spiegare il significato di almeno una delle proprietà suddette.

3.2) Determinare il differenziale stocastico del processo

$$y(t) = 2t \cdot e^{6W(t)}$$ dove W(t) è di Wiener con $\sigma=1$, $t>0$.

1)

1.1) $X \rightarrow F(x)$ $\quad F(x) = \text{Prob}\,[X \le x]$; $Y \rightarrow F(y)$ $\quad F(y) = \text{Prob}\,[Y \le y]$ — 1° ordine

$X_{st}>Y$: $\begin{cases} F(x) \le F(y) \\ \forall\, x \in R \text{ la disuguaglianza vale per almeno 1 x in senso stretto} \end{cases}$

$X \rightarrow F(x)$ $\quad F(x) = \text{Prob}\,[X \le x]$; $Y \rightarrow F(y)$ $\quad F(y) = \text{Prob}\,[Y \le y]$ — 2° ordine

$A_x = \int_{-\infty}^{x} Fx(x)dx$

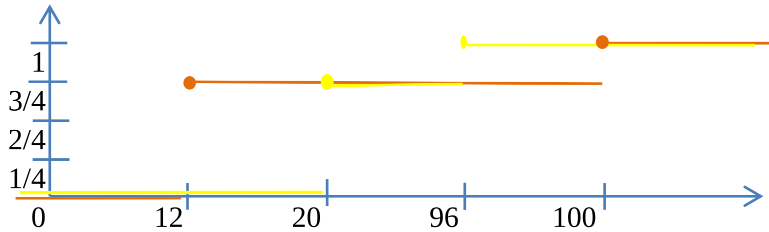
$A_y = \int_{-\infty}^{x} Fy(x)dx$

$\begin{cases} A_x \le A_y \\ \forall\, x \in R \text{ la disuguaglianza vale per almeno 1 x in senso stretto} \end{cases}$

1.2)

$X \begin{cases} 12 & 3/4 \\ 100 & 1/4 \end{cases} \qquad Y \begin{cases} 20 & 3/4 \\ 96 & 1/4 \end{cases}$

$F_x(x) \begin{cases} 0 & x<12 \\ 3/4 & 12 \le x < 100 \\ 1 & x \ge 100 \end{cases} \qquad F_y(x) \begin{cases} 0 & x<20 \\ 3/4 & 20 \le x < 96 \\ 1 & x \ge 96 \end{cases}$



X non domina stocasticamente Y perché:

Tra 12 e 20: $F_y(x) < F_x(x)$ *(quello più in basso è dominante)*

Tra 96 e 100: $F_x(x) < F_y(x)$ quindi:

$X>_{st}Y \begin{cases} F_x(x) \le F_y(x) \\ \forall\, x \in R \text{ la diseguaglianza \underline{NON} vale in senso stretto per almeno una x} \end{cases}$

2) $\varphi(E)y(x) = 0$ (da testo)

2.1) $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_s E^S$

Equazione alle differenze lineari, a coefficienti costanti, omogenea:

formula generale: $\varphi(E) = a_n E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \dots + a_1 E^1 + a_0 E^0 = \sum_{s=0}^{n} a_s E^S$

ns. caso: $\varphi(E) = a_0 E^0\, y(x) + a_1 E^1\, y(x) + \dots + a_n E^n\, y(x) = \mathbf{0}$

Equazione (polinomio) caratteristica associata all'equazione:

formula generale: $\varphi(r) = \quad a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r^1 + a_0 r^0 = \sum_{s=0}^{n} a_s r^S$

ns. caso: $\varphi(E)\, r^x = r^x\, \varphi(r)$

se: $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_s E^S$

allora sostituendo: $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_s E^S r^x = \quad \sum_{s=0}^{n} a_s r^S r^x =$

$= r^x \sum_{s=0}^{n} a_s r^S = r^x\, \varphi(r)$

2.2) $y(x+2) - 36y(x) = 70 \bullet x$

$r^2 - 36 = 0 \qquad r_{1,2} = \pm 6$

$y^*(x) = C_1(6)x + C_2(-6)^x$

Regola di sostituzione:
Se $n^x \to A_0 n^x$
Se $x \to A_0 + A_1 x$
Se $x^2 \to A_0 + A_1x + A_2x^2$ etc.

$\overline{y} = A_0 + A_1 \bullet 70x$

$A_0 + 70(x+2)A_1 - 36A_0 - 36 \bullet 70xA_1 = 70x$

$A_0 + 70xA_1 + 140A_1 - 36A_0 - 2520xA_1 = 70x$

$-35A_0 - 2450xA_1 + 140A_1 = 70x$

$\begin{cases} -2450\cancel{x}A_1 = 70\cancel{x} \\ 140A_1 - 35A_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = -1/35 \\ -35A_0 + 140(-1/35) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = -1/35 \\ A_0 = -4/35 \end{cases}$

$\overline{y} = -4/35 - 70x \bullet 1/35 = -4/35 - 2x$

$y(x) = C1(6)x + C2(-6)x - 2x - 4/35$ Soluzione generale.

3.1)

$\{W(t), t \in |0,+\infty|\}$ = processo stocastico

Enunciare le 4 proprietà **<u>Wiener</u>** e spiegarne 1

1. $W_0 = 0$ con probabilità = 1

Il processo <u>inizia</u> sicuramente <u>da</u>lla posizione <u>0</u>.

2. Tempo: $t_0, t_1, \ldots$

$Wt_1 - Wt_0, Wt_2 - Wt_1, \ldots, Wt_n - Wt_{n-1}$

Spiegazione: gli <u>incrementi</u> sono <u>indipendenti e</u>, secondo la proprietà di Markov, ciò si riflette in una <u>mancanza di memoria</u>.

3. $Wt - Ws \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

La variabile aleatoria "incremento" Wt - Ws è distribuita normalmente con media = 0 e varianza $\sigma^2(t-s)$ e la funzione di probabilità $F(x) = [W_t - W_s \leq x]$ implica che <u>la varianza cresce più della media</u>.

4. è un processo a <u>traiettorie continue</u>: gli incrementi sono stazionari perché la probabilità dipende da t - s e non da "t" ed "s" presi separatamente, con $[Ws, Wz] = 0 + \sigma^2_s$

3.2)

$y(t) = 2t \bullet e^{6W(t)} \qquad$ con $\sigma = 1, t > 0$

Poiché abbiamo il processo e NON il diff.stoc. ("non ho la g"), poniamo:

$dW(t) = \mu\, dt + \sigma^2\, dW(t)$

$\varphi = 0 \qquad g = \sigma = 1$

u'_1 = derivata prima del processo rispetto a W (attenzione: non rispetto a t):

$u'_1 = 2t \bullet e^{6W(t)} = 2t \bullet 6 \bullet e^{6W(t)} = 12t \bullet e^{6W(t)}$

$u''_{11} = 12t \bullet e^{6W(t)} = \qquad 6 \bullet 6 \bullet 2te^{6W(t)} = 72t \bullet e^{6W(t)}$

$u'_2 = 2t \bullet e^{6W(t)} = \qquad 2 \bullet e^{6W(t)}$

formula generale del lemma di Ito:

$dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\, g\, dW(t)$

sostituisco le derivate:

$dy(t) = [12t \bullet e^{6W(t)}\, dW(t) + 2e^{6W(t)}\, dt + 1/2 \bullet 72t \bullet e^{6W(t)}]1^2dt$

$dy(t) = 12t \bullet e^{6W(t)}\, dW(t) + [2 + 36t] \bullet e^{6W(t)}dt$

$2t \bullet e^{6W(t)} = y(t) \qquad$ (lo so dal testo)

$e^{6W(t)} = y(t)/2t$

$dy(t) = 12t \cdot (y(t)/2t)\, dWt + [2 + 36t] \cdot y(t)/2t\, dt$

$dy(t) = 6\, y(t)\, dWt + [2 + 36t]/2t \cdot y(t)\, dt$

$dy(t) = 6\, y(t)\, dWt + [1/t + 18] \cdot y(t)\, dt$

STRUMENTI MATEMATICI PER L'ECONOMIA
2006

1)

1.1) Devo confrontare le grandezze aleatorie (variabili aleatorie) X_i e X_j, $i \neq j$. Scrivere come le confronto se utilizzo rispettivamente:

1.1.a) il criterio del valor medio, 1.1.b) il criterio dell'utilità attesa.

1.2) Sono date le seguenti grandezze aleatorie (variabili aleatorie):

$$X_1 \begin{cases} 6 & \frac{1}{6} \\ 16 & \frac{5}{6} \end{cases} \quad ; \quad X_2 \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & \frac{1}{3} \\ 40 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

Stabilire <u>se</u>, ai sensi della dominanza stocastica del primo ordine, X_1 domina stocasticamente X_2 e motivare la risposta.

2)

E' data la seguente equazione alle differenze finite <u>omogenea:</u>

(*) $\varphi(E)y(x) = 0$,

dove E è l'operatore spostamento e $\varphi(E)$ è un operatore polinomiale.

2.1) Scrivere $\varphi(E)$ tale che la (*) sia lineare, a coefficienti costanti e di ordine n.

2.2) Dimostrare che se r_1 è una soluzione dell'equazione caratteristica associata all'equazione (*), allora $y_1(x) = (r_1)^x$ è una soluzione all'equazione (*).

2.3) Trovare la soluzione generale della seguente equazione:

$y(x+2) - 36y(x) = 0 \quad x = 0,1,2\ldots$

3) Si assuma W(t) processi di Wiener con media 0 e varianza t.

3.1) Scrivere l'enunciato del lemma di Ito

3.2) Dato il differenziale stocastico

(°) $dx(t)=5x(t)dt+3x(t)dW(t), \quad x(t)>0$

determinare, utilizzando il Lemma di Itô, il differenziale stocastico di $y(t) = \ln x(t)$.

3.3) Sia x(t) soddisfacente la (°).

Che tipo di processo stocastico è x(t)?

Che tipo di processo stocastico è $y(t) = \ln x(t)$?

1)

Si devono confrontare 2 variabili aleatorie. Dire come si procede per il confronto se si utilizza:

a) Il criterio del valore medio:

Variabile aleatoria discreta

X: x_i p_i

$E[x]=\sum x_i \bullet p_i$

Funzione di probabilità

X: x_i p_i

$E[x]=\int_a^b f(x)x_i\, dx$

Funzione di ripartizione F(A)

se derivabile: $F(A) \rightarrow F'(x)= f(x) \rightarrow E[x]=\int_a^b f(x)\, dx$

se non derivabile: $F(A) \rightarrow \int_a^b d\, F(x) \rightarrow E[x]=\int_a^b dF(x)=1$

Confronto: è sempre preferibile la funzione con valore medio maggiore.

$E[x]_1>E[x]_2$ conviene x_1

$E[x]_1<E[x]_2$ conviene x_2

$E[x]_1=E[x]_2$ indifferente

Qualora si abbia una sola x si confronta con l'operatore nullo 0

$E[x]_1>0$ eseguo

$E[x]_1<0$ non eseguo

$E[x]_1=0$ indifferente

b) Il criterio dell'utilità attesa:

$X_1 \rightarrow u(X_1)$ con funzione $u: R \rightarrow R$

$X_2 \rightarrow u(X_2)$ con $u' > 0$, $u''<0$, funzioni continue

Variabile aleatoria discreta

$u(X_i)$: $u(x_i)$ p_i

$E[x]=\sum u(x_i)\bullet p_i$

Funzione di probabilità

$u(x)$: $u(x)$ $f(x)$

$E[u(x)]=\int_a^b f(x)u(x_i)\, dx$

Confronto:

$E[u(x_1)]>E[x]_2$ conviene x_1

$E[u(x_1)]<E[x]_2$ conviene x_2

$E[u(x_1)]=E[x]_2$ indifferente

$E[u(x_1)]>0$ conviene

$E[u(x_1)]<0$ non conviene

$E[u(x_1)]=0$ indifferente

Spiegazione "più rapida":

a) criterio del valor medio:

$E[x_i]=\sum x_i \bullet p_i$

$E[x_j]=\sum x_j \bullet p_j$

Confronto $E[x_i]$ con $E[x_j]$

e scelgo quello maggiore.

Se = è indifferente.

a) criterio dell'utilità attesa:

("come sopra + la u")

$E[u(x_i)]=\sum u(x_i)\bullet p_i$

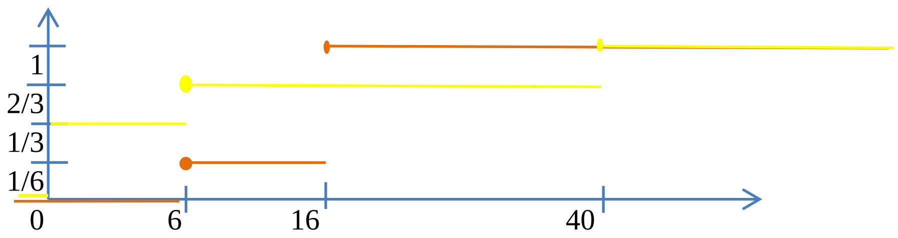
$E[u(x_j)]=\sum u(x_j)\bullet p_j$

Confronto come sopra.

1.2)

dominanza stocastica di prim'ordine:

$$F(x_1) \begin{cases} 0 & x<6 \\ 1/6 & 6 \leq x < 16 \\ 1 & x \geq 16 \end{cases} \qquad F(x_2) \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/3 & 0 \leq x < 6 \\ 2/3 & 6 \leq x < 40 \\ 1 & x \geq 40 \end{cases}$$



X_1 non domina stocasticamente X_2

tra 16 e 40 $\quad F(x_1)>F(x_2)$

es.: x = 20 $\begin{cases} \text{in } F(x_1) = 1 \\ \text{in } F(x_2) = 2/3 \end{cases}$

$X >_{st} Y \begin{cases} F_x(x) \leq F_y(x) \\ \forall\ x \in R \text{ la diseguaglianza } \underline{\text{NON}} \text{ vale} \\ \text{(in senso stretto)} \end{cases}$

2) $\quad \varphi(E)y(x) = 0$

2.1) $\quad \varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

Equazione alle differenze lineari, a coefficienti costanti, omogenea:

formula generale: $\quad \varphi(E) = a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \ldots + a_1 E^1 + a_0 E^0 = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

ns. caso: $\quad \varphi(E) = a_0 E^0\, y(x) + a_1 E^1\, y(x) + \ldots + a_n E^n\, y(x) = 0$

2.2)

Equazione (polinomio) caratteristica associata all'equazione:

formula generale: $\quad \varphi(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r^1 + a_0 r^0 = \sum_{s=0}^{n} a_S r^S$

ns. caso: $\quad \varphi(E)\, r^x = r^x\, \varphi(r)$

se: $\quad \varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

allora sostituendo: $\quad \varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S r^x = \quad \sum_{s=0}^{n} a_S r^S r^x =$

$= r^x \sum_{s=0}^{n} a_S r^S = r^x \varphi(r)$

2.3)

$y(x+2) - 36y(x) = 0$

$r^2 - 36 = 0 \qquad r_{1,2} = \pm 6$

$y(x) = C_1(6)x + C_2(-6)^x$

3.1)

Processo di Wiener: $W(t) \sim N(0, \sigma^2_t)$

Lemma di Ito: $\quad$ Formula generale: $\quad dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\, g\, dW(t)$

$\{W(t), t \in T\} \quad T:[0, +\infty)$

Moto browniano semplice: $\quad$ con: μ, σ costanti $\quad \sigma \neq 0$

$dW(t) = \mu dt + \sigma dWt \;\; dW(t) = 0dW(t) + tdW(t)$

$y(t) = u(W(t), t)$

Le 3 derivate sono continue: $\quad u'_1; u''_{11}; u'_2$

$u: R \times T \to R$

3.2)

$dx(t) = 5x(t)dt + 3x(t)dW(t)$ diff.stoc.: $y(t) = \ln x(t)$

$\varphi = 5x(t)$ $g = 3x(t)$

$y'_1 = 1/x(t)$ $\longrightarrow$ derivata prima del logaritmo = 1/ argomento del logaritmo

$y''_{11} = -1/x^2$ $\longrightarrow$ derivata della fratta (y'_1)

$y'_2 = 0$ $\longrightarrow$ 0 perché non è del tipo: $y(t) = \ln x(t) + nt$

formula generale del lemma di Ito:

$dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\, g\, dW(t)$

sostituisco le derivate:

$dy(t) = [1/x(t) \bullet 5x(t) + 0 + 1/2 \bullet 9x^2(t) \bullet (-1/x^2(t))]dt + 1/x(t) \bullet 3x(t)\, dW(t)$

$dy(t) = [5 - 9/2]dt + 3\, dW(t)$

$dy(t) = 1/2dt + 3\, dW(t)$

3.3)

Il dx del precedente esercizio è un:

Moto browniano geometrico: $dx(t) = \mu x(t)dt + \sigma x(t)\, dW(t)$ ("perché ha la x")

$dx(t) = 5x(t)dt + 3x(t)\, dW(t)$

Il dy del precedente esercizio è un:

Moto browniano semplice: $dx(t) = \mu dt + \sigma dWt\, dW(t)$ con: u, σ costanti $\sigma \neq 0$

$dy(t) = 1/2\, dt + 3dWt$

STRUMENTI MATEMATICI PER L'ECONOMIA
7 giugno 2006

1)
1') Si consideri un assicuratore (B) che possiede la ricchezza $w^* \geq 0$ e deve decidere se, ricevendo un premio Π, non è per lui sfavorevole offrire l'assicurazione del rischio

$$\Phi : \begin{cases} -\lambda & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$

(cioè se non è sfavorevole accollarsi il rischio di dover sborsare λ con probabilità p), $0<p<1$.

Si chiede di:

a) scrivere le due situazioni Y_1 e Y_2 rispettivamente che egli deve confrontare;

b) determinare il minimo premio P che è disposto ad accettare nell'ipotesi che utilizzi il criterio del valor medio;

c) scrivere l'equazione che deve soddisfare il minimo premio Π_B che B è disposto ad accettare nell'ipotesi che utilizzi il criterio dell'utilità attesa, essendo û la sua funzione di utilità.

1') Determinare l'utilità attesa di

$$X : \begin{cases} 24 & \frac{1}{6} \\ 120 & \frac{5}{6} \end{cases}$$

essendo data la funzione di utilità $u(x) = \ln(x+1)$, $x>0$.

2)
2') Dare la definizione di:

a) equazione alle differenze finite lineare, a coefficienti costanti, di ordine n, <u>omogene</u>a

b) equazione alle differenze finite lineare, a coefficienti costanti, di ordine n, <u>completa.</u>

2'') Trovare la soluzione generale della seguente equazione alle differenze finite:

$$y(x+2) - 64y(x) = 5.(7)^x \quad , \quad x=0,1,.........$$

Trovare poi la soluzione particolare tale che $y(0)=y(1) = \frac{2}{3}$.

3) Sia dato il processo stocastico $\{x(t), t\in[0,\infty[\}$ che ammetta il differenziale stocastico

$$dx(t) = \varphi(x(t),t)\, dt + g(x(t),t)\, dW(t) ,$$

dove $\{W(t), t\in [0,\infty[\}$ è un processo di Wiener con $\sigma^2=1$.

Si consideri il processo stocastico $\{y(t), t\in T\}$ così definito: $y(t) = u(x(t),t)$.

3') Dire di quali proprietà deve godere la funzione u per poter applicare il lemma di Itô a y(t) e scrivere il differenziale stocastico del processo $\{y(t), t\in T\}$ (lemma - formula di Itô).

3') Posto $dx(t) = 3dt + 2dW(t)$, trovare il differenziale stocastico di $y(t) = e^{5x(t)} - 4t$.

1)

Assicuratore B, ricchezza $w^* \geq 0$, premio Π, rischio Φ, premio min = P

$$\Phi: \begin{cases} -\lambda; \; p \\ 0; \; 1-p \end{cases} \quad \text{con } 0 < p < 1$$

a) $Y_1 = w^*$ non assicuro

$$Y_2 = \begin{cases} w^* + \Pi - \lambda \quad p \to \text{assicuro ma ho il danno} \\ w^* + \Pi \quad 1 - p \to \text{assicuro ma non ho il danno} \end{cases}$$

b) se utilizzo il metodo del valor medio $\to$ P = ?

$E[Y_1] = w^*$

$E[Y_2] = (w^* + \Pi - \lambda) \bullet p + (w^* + \Pi)(1 - p) = w^* + \Pi - \lambda p$

per assicurare devo ottenere $E[Y_2] > E[Y_1]$:

$w^*p + \Pi p - \lambda p + w^* - w^*p + \Pi - \Pi p > w^*$

$w^* + \Pi - \lambda p > w^*$

$\Pi > \lambda p$

c) se utilizzo il metodo dell'utilità attesa:

$E[u(Y_1)] = u \bullet w^*$

$$E[u(Y_2)] = \begin{cases} u(w^* + \Pi - \lambda) & p \\ u(w^* + \Pi) & 1 - p \end{cases}$$

$E[u(Y_2)] > E[u(Y_1)]$

$u(w^* + \Pi - \lambda) \bullet p + u(w^* + \Pi)(1 - p) > u \bullet w^*$

$upw^* + up\Pi - up\lambda + (uw^* + u\Pi)(1 - p) > u \bullet w^*$

$\cancel{upw^*} + \cancel{up\Pi} - up\lambda + \cancel{uw^*} - \cancel{upw^*} + u\Pi - \cancel{upP} > \cancel{u \cdot w^*}$

$\Pi_B > p\lambda$

$\Pi_B < \Pi_{precedente}$

accetterà un Π^* tale che:

$\Pi_B < \Pi^* < \Pi_S \to \Pi^* = \lambda p + \theta$

($\Pi_B =$ premio dell'assicuratore

$\Pi^* =$ premio "concordato"

$\Pi_B =$ premio max che pagherebbe l'assicurato)

θ = caricamento

Questa formula viene soddisfatta perché il capitale posseduto dall'assicuratore è maggiore di quello posseduto dall'assicurato e fa sì che l'assicuratore, benché avverso al rischio, abbia un'avversione minore di quella dell'assicurato.

1.1)

Determinare l'utilità attesa di:

$$X: \begin{cases} 24 & 1/6 \\ 120 & 5/6 \end{cases}$$

Funzione di utilità: $u(x) = \ln(x+1)$, con $x > 0$

$E[u(x)] = \ln(25) \bullet 1/6 + \ln(121) \bullet 5/6 = 4{,}532971$

2)

Definizione di eq. Alle differenze finite, lineare, a coeff. Costanti, di ordin n, completa

- eq. Alle diff. Finite: relazione che lega la variabile indipendente x ad una funzione y che è funzione di x: $y= f(x)$

- ordine: differenza tra il massimo e il minimo esponente dell'operatore E che compare nella funzione. n: $E^n y(x)$ Esempi:

Se $y = f(x+2) + f(x+1) + f(x) \rightarrow$ ordine = 2

Se $y = f(x+1) + f(x) \rightarrow$ ordine = 1

eq. Lineare a coeff. Cost. con termine noto:

$a_1y(x+1) + a_0y(x) + c = 0$ con a_1 e a_0 = coeff. cost. $\neq 0$

Divido per a_1:

$-B = c/a_1$ $-A = a_0/a_1$

$$y(x): \begin{cases} A^{x-a}\, y(a) + B\,(1 - A^{x-a})/(1 - A) & A \neq 1 \\ y(a) + B(x - a) & A = 1 \end{cases}$$

- completa: $y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x)$

$y(E) = \Sigma_{s=0}^{n} a_s E^S$ $y(E)y(x) = g(x)$ con $g(x) \neq 0$

$y(E)y^*(x) = 0 \rightarrow$ eq. Omo. Associata

$y(E)\overline{y}(x) = g(x) \rightarrow$ soluzione particolare

$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) \rightarrow$ soluzione generale dell'eq. Completa

2")

$y(x + 2) - 64y(x) = 5 \bullet 7^x$ con x = 0,1,...

Trovare la soluzione particolare tale che $y(0) = y(1) = 2/3$

$r^2 - 64 = 0$ $r_{1,2} = \pm 8$

$y^* = C_1 8^x + C_2(-8)^x$

$\overline{y} = A_1 \bullet 7^x$

$A_1 \bullet 7^{x+2} - 64A_1 7^x = 5 \bullet 7^x$

$\cancel{7^x}[49A_1 - 64A_1] = 5 \bullet \cancel{7^x}$

$-15A_1 = 5 \rightarrow A_1 = -1/3$

$\overline{y} = -1/3 \bullet 7^x$

$y(x) = C_1 8^x + C_2(-8)^x -1/3 \bullet 7^x$

Se $y(0) = 2/3$

$C_1(8)^0 + C_2(-8)^0 -1/3 \bullet 7^0 = 2/3$

$C_1 = - C_2 + 1$

Se $y(1) = 2/3$

$C_1(8)^1 + C_2(-8)^1 -1/3 \bullet 7^1 = 2/3$

$$\begin{cases} C_1 = - C_2 + 1 \\ (-C_2 + 1)8 + C_2(-8) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = - C_2 + 1 \\ -16C_2 = - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 11/16 \\ C_1 = 5/16 \end{cases}$$

Soluzione generale:

$11/16(8)^x + 5/16\,(-8)^x - 1/3 \bullet 7^x$

3')

u: R x T $\rightarrow$ R processo stocastico: y(t) = u(x(t), t)

con u funzione continua, dotata di derivate (prima e seconda) parziali continue.

con derivata prima continua rispetto alla seconda variabile (che "solitamente" è il tempo t).

Lemma di Ito:

$dy(t) = du(x(t),t) = [u'_1(x(t),t)\ \varphi(x(t), t) + u'_2(x(t), t) + 1/2\ u''_{11}(x(t), t)\ (g(x(t), t)^2]dt +$

$+ u'1(x(t), t)\ g(x(t), t)dW(t).$

3")

$dx(t) = 3dt + 2dW(t)$ diff.stoc.: $y(t) = e^{5x(t)} -4t$

$\varphi = 3$ $g = 2$

y'_1 = derivata prima del diff.stoc. rispetto alla x

$y'_1 = 5e^{5x(t)}$ → (non c'è -4 perché non derivo la t, se fosse una moltiplicazione la copierei)

$y''_{11} = 25e^{5x(t)}$ → derivata seconda rispetto a x

$y'_2 = -4$ → derivata rispetto al tempo t

formula generale del lemma di Ito:

$dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\ g\ dW(t)$

sostituisco le derivate:

$dy(t) = [5e^{5x(t)} \bullet 3 + (-4) + 1/2 \bullet 4 \bullet 25e^{5x(t)}]dt + 5e^{5x(t)} \bullet 2\ dW(t)$

$dy(t) = [15e^{5x(t)} -4 + 50e^{5x(t)}]dt + 10e^{5x(t)}\ dW(t)$

$dy(t) = [65e^{5x(t)} -4]dt + 10e^{5x(t)}\ dW(t)$

Sostituisco il differenziale stocastico dentro il lemma ponendo:

$65e^{5x(t)} = 65y(t) + 260t$ e: (il 260 e il 40 sono i fattori che mettiamo per

$10e^{5x(t)} = 10y(t) + 40t$ eliminare il -260t e il -40t)

Sostituisco le y(t) trovate nel lemma:

$dy(t) = [65y(t) + 260t -4]dt + [10y(t) + 40t]dW(t)$

STRUMENTI MATEMATICI PER L'ECONOMIA

Appello 9 maggio 2007 Imperia

1)

Si devono confrontare due variabili aleatorie. Dire come si procede per il confronto se si utilizza:

a) il criterio del valor medio;

b) la dominanza stocastica del primo ordine.

Si considerino le seguenti "somme aleatorie" (variabili aleatorie) che assumono i valori indicati con le rispettive probabilità:

$$X_1 \begin{cases} 100 & \frac{1}{2} \\ 120 & \frac{1}{2} \end{cases}; \qquad X_2 \begin{cases} 102 & \frac{1}{6} \\ 120 & \frac{5}{6} \end{cases}$$

Quale si preferisce ai sensi del criterio del valor medio?

Quale si preferisce ai sensi della dominanza stocastica del primo ordine?

2)

2') Dare la definizione di:

equazione alle differenze finite lineare, a coefficienti costanti, di ordine n, completa.

2") Trovare la soluzione generale della seguente equazione alle differenze finite:

$$y(x+2) + 2y(x+1) - 35y(x) = 5.(9)^{x} \quad , \quad x=0,1,.........$$

Trovare poi le soluzioni particolari tali che $y(0)= 1$.

3)

3') Sia dato lo spazio misurabile $(\Omega,\mathcal{A})$ e sia data una funzione d'insieme μ definita su $\mathcal{A}$ la quale associa ad ogni elemento di $\mathcal{A}$ un numero reale.

Dire di quali proprietà deve godere μ per essere una misura.

Sempre con riferimento allo spazio misurabile $(\Omega,\mathcal{A})$, possiamo definire uno speciale tipo di misura: la probabilità P.

Dire di quale proprietà "in più" gode P.

Dimostrare che $0 \leq p(A) \leq 1$ per ogni $A \in \mathcal{A}$

3'') Dato il differenziale stocastico

$$(°) \qquad dx(t)=5x(t)dt+3x(t)dW(t), \quad x(t)>0$$

determinare, utilizzando il Lemma di Itô, il differenziale stocastico di $y(t) = \ln x(t)$.

1)

Si devono confrontare 2 variabili aleatorie. Dire come si procede per il confronto se si utilizza:

a) Il criterio del valore medio:

Variabile aleatoria discreta

X: x_i p_i

$E[x]=\sum x_i \bullet p_i$

Funzione di probabilità

X: x_i p_i

$E[x]=\int_a^b f(x)x_i\, dx$

Funzione di ripartizione F(A)

se derivabile: $F(A)\rightarrow F'(x)= f(x)\rightarrow E[x]=\int_a^b f(x)\, dx$

se non derivabile: $F(A)\rightarrow\int_a^b d\, F(x)\rightarrow E[x]=\int_a^b dF(x)=1$

Confronto:

$E[x]_1>E[x]_2$ conviene x_1

$E[x]_1<E[x]_2$ conviene x2

$E[x]_1=E[x]_2$ indifferente

qualora si abbia una sola x si confronta con l'operatore nullo 0

$E[x]_1>0$ eseguo

$E[x]_1<0$ non eseguo

$E[x]_1=0$ indifferente

Spiegazione "più rapida":

a) criterio del valor medio:

$E[x_i]=\sum x_i \bullet p_i$

$E[x_j]=\sum x_j \bullet p_j$

Confronto $E[x_i]$ con $E[x_j]$

e scelgo quello maggiore.

Se = è indifferente.

a) criterio dell'utilità attesa:

("come sopra + la u")

$E[u(x_i)]=\sum u(x_i)\bullet p_i$

$E[u(x_j)]=\sum u(x_j)\bullet p_j$

Confronto come sopra.

b) la dominanza stocastica di I ordine

$X\rightarrow F(x)$ $Y\rightarrow F(y)$

F(x)= probabilità $[X\leq x]$

F(y)= probabilità $[Y\leq x]$

continue>0

$X>_{st}Y$

$F(x)\leq F(y)$

$\forall$x e la diseguaglianza vale in senso stretto < almeno 1x

(non nel compito) dominanza stocastica II ordine

$X\rightarrow F(x)$ $Y\rightarrow F(y)$

F(x)= probabilità $[X\leq x]$ $Ax_= \int_{-\infty}^{x} Fx(x)\, dx$

F(y)= probabilità $[Y\leq x]$ $Ay_= \int_{-\infty}^{x} Fy(x)\, dx$

$A_x \leq A_y$

$\forall$x e la diseguaglianza vale per almeno 1x

1')

X_1	100	1/2	X_2	102	1/6
	120	1/2		120	5/6

criterio del valor medio:

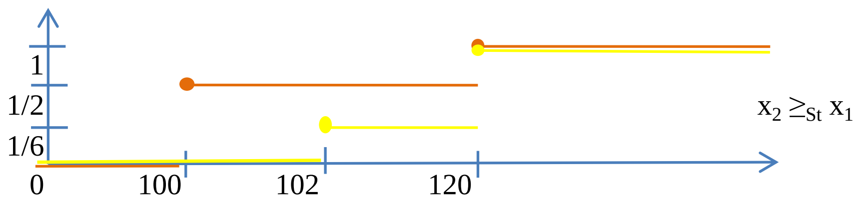
$E[x]_1=100\bullet 1/2 + 120\bullet 1/2 =110$

$E[x]_2=102\bullet 1/6 + 120\bullet 5/6 =117$

$E[x]_2>E[x]_1$

Dominanza stocastica di prim'ordine:

$$F(x_1) = \begin{cases} 0 & x<100 \\ 1/2 & 100 \le x < 120 \\ 1 & x \ge 120 \end{cases} \qquad F(x_2) = \begin{cases} 0 & x < 102 \\ 1/6 & 102 \le x < 120 \\ 1 & x \ge 120 \end{cases}$$



Ai sensi della dom. stoc. di 1° ordine, si preferisce X_2 ("o sta sotto o è =").

2)

Dare la definizione di eq. alle differenze finite, lineare, a coeff. costanti, di ordin n, completa

- eq. Alle diff. Finite: relazione che lega la variabile indipendente x ad una funzione y che è funzione di x: $y= f(x)$
- ordine: differenza tra il massimo e il minimo esponente dell'operatore E che compare nella funzione. n: $E^n y(x)$ Esempi:

Se $y = f(x+2) + f(x+1) + f(x) \to$ ordine = 2

Se $y = f(x+1) + f(x) \to$ ordine = 1

eq. Lineare a coeff. Cost. con termine noto:

$a_1y(x+1) + a_0y(x) + c = 0$ con a_1 e a_0 = coeff. cost. $\neq 0$

Divido per a_1:

$-B = c/a_1$ $-A = a_0/a_1$

$$y(x): \begin{cases} A^{x-a}\, y(a) + B\,(1 - A^{x-a})/(1 - A) & A \neq 1 \\ y(a) + B(x - a) & A = 1 \end{cases}$$

- completa: $y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x)$

$y(E) = \Sigma_{s=0}^{n} a_s E^S$ $y(E)y(x) = g(x)$ con $g(x) \neq 0$

$y(E)y^*(x) = 0 \to$ eq. Omo. Associata

$y(E)\bar{y}(x) = g(x) \to$ soluzione particolare

$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) \to$ soluzione generale dell'eq. Completa

2")

$y(x + 2) + 2y(x + 1) - 35y(x) = 5 \bullet 9^x$ con $x = 0,1,\ldots$

Trovare la soluzione particolare tale che $y(0) = 1$

$r^2 + 2r - 35 = 0$ $r_{1,2} = - 2 \pm \sqrt{144}/2 = 5, -7$

$y^* = C_15^x + C_2(-7)^x$

$\bar{y} = A_1 \bullet 9^x$

$A_1 \bullet 9^{x+2} + 2A_19^{x+1} - 35A_19^x = 5 \bullet 9^x$

$\cancel{9^x}[81A_1 + 18A_1 - 35A_1] = 5 \bullet \cancel{9^x}$

$64A_1 = 5 \to A_1 = 5/64$

$\bar{y} = 5/64 \bullet 9^x$

$y(x) = C_15^x + C_2(-7)^x + 5/64 \bullet 9^x$

Se $y(0) = 1$

$C_1(5)^0 + C_2(-7)^0 + 5/64 \bullet 9^0 = 1$

$C_1 = - C_2 + 59/64$

$y(x) = (-C_2 +59/64)(5)^x + C_2(-7)^x + 5/64 \bullet 9^x$

3') (pag.13 testo)

$(\Omega, \tilde{A})$ = spazio misurabile

μ su A associa ad ogni elemento di $\tilde{A}$ un n° reale, con le 3 seguenti proprietà:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Se $A \in \tilde{A} \rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq +\infty$
3. Se $A_1, A_2, \ldots \in \tilde{A}$ con $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\forall i \neq j \rightarrow$

$$\rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

La proprietà in più di cui gode P è:

$P(A+A^C) = P(A) + P(A^C) = P(A \cup A^C) = P(\Omega) = 1$ quindi:

$P(\Omega) = 1$ con P = probabilità e C = complementare

$P(A+A^C) = P(A) + P(A^C) \geq P(A)$

$\forall A \in \tilde{A} \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

3")

$dx(t) = 5x(t)dt + 3x(t)dW(t)$ diff.stoc.: $y(t) = \ln x(t)$

$\varphi = 5x(t)$ $g = 3x(t)$

$y'_1 = 1/x(t)$ $\longrightarrow$ derivata prima del logaritmo = 1/ argomento del logaritmo

$y''_{11} = -1/x^2$ $\longrightarrow$ derivata della fratta (y'_1)

$y'_2 = 0$ $\longrightarrow$ 0 perché non è del tipo: $y(t) = \ln x(t) + nt$

formula generale del lemma di Ito:

$dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\, g\, dW(t)$

sostituisco le derivate:

$dy(t) = [1/x(t) \bullet 5x(t) + 0 + 1/2 \bullet 9x^2(t) \bullet (-1/x^2)]dt + 1/x(t) \bullet 3x(t)\, dW(t)$

$dy(t) = [5 - 9/2]dt + 3\, dW(t)$

$dy(t) = 1/2dt + 3\, dW(t)$

STRUMENTI MATEMATICI PER L'ECONOMIA
3° appello invernale 2007/08 13 febbraio 2008 GENOVA

1)
1.1) Devo confrontare le grandezze aleatorie (variabili aleatorie) X_i e X_j, $i \neq j$. Scrivere come le confronto se utilizzo rispettivamente:
1.1.a) il criterio del valor medio, 1.1.b) il criterio dell'utilità attesa.

1.2) Sono date le seguenti grandezze aleatorie (variabili aleatorie):

$$X_1 \begin{cases} 6 & \frac{1}{6} \\ 16 & \frac{5}{6} \end{cases} \quad ; \qquad X_2 \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & \frac{1}{3} \\ 40 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

Stabilire se, ai sensi della dominanza stocastica del primo ordine, X_1 domina stocasticamente X_2 e motivare la risposta.

2)
E' data la seguente equazione alle differenze finite completa a coefficienti costanti:
(*) $\varphi(E)y(x)= g(x)$,
dove E è l'operatore spostamento e $\varphi(E)$ è un operatore polinomiale.
2.1) Scrivere l'equazione omogenea ad essa associata;
scrivere l'equazione caratteristica associata alla suddetta equazione omogenea.

2.2) Trovare la soluzione generale della seguente equazione:
$$y(x+2) - 25y(x) = 5^x, \quad x=0,1,2,......$$

3) Si assuma $W(t)$ processo di Wiener con media 0 e varianza t .
3.1) Scrivere l'enunciato del Lemma di Itô precisando le ipotesi necessarie.
3.2) Determinare il differenziale stocastico del processo
$$y(t) = 7t^2 \cdot e^{W(t)}$$ dove $W(t)$ è di Wiener con $\sigma=1$, $t>0$.

1)

Si devono confrontare 2 variabili aleatorie. Dire come si procede per il confronto se si utilizza:

a) Il criterio del valore medio:

Variabile aleatoria discreta

X: x_i p_i

$E[x]=\sum x_i \bullet p_i$

Funzione di probabilità

X: x_i p_i

$E[x]=\int_a^b f(x)x_i\, dx$

Funzione di ripartizione F(A)

se derivabile: $F(A) \rightarrow F'(x)= f(x) \rightarrow E[x]=\int_a^b f(x)\, dx$

se non derivabile: $F(A) \rightarrow \int_a^b d\, F(x) \rightarrow E[x]=\int_a^b dF(x)=1$

Confronto:

$E[x]_1>E[x]_2$ conviene x_1

$E[x]_1<E[x]_2$ conviene x2

$E[x]_1=E[x]_2$ indifferente

Qualora si abbia una sola x si confronta con l'operatore nullo 0

$E[x]_1>0$ eseguo

$E[x]_1<0$ non eseguo

$E[x]_1=0$ indifferente

b) Il criterio dell'utilità attesa:

$X_1 \rightarrow u(X_1)$ con funzione u: $R \rightarrow R$

$X_2 \rightarrow u(X_2)$ con u' > 0, u''<0, funzioni continue

Variabile aleatoria discreta

$u(X_i)$: $u(x_i)$ p_i

$E[x]=\sum u(x_i) \bullet p_i$

Funzione di probabilità

u(x): u(x) f(x)

$E[u(x)]=\int_a^b f(x)u(x_i)\, dx$

Confronto:

$E[u(x_1)]>E[x]_2$ conviene x_1

$E[u(x_1)]<E[x]_2$ conviene x_2

$E[u(x_1)]=E[x]_2$ indifferente

$E[u(x_1)]>0$ conviene

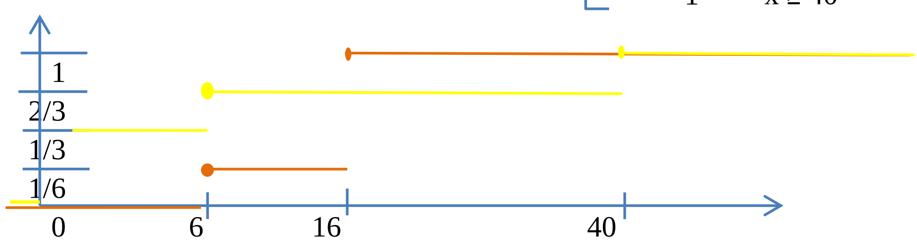
$E[u(x_1)]<0$ non conviene

$E[u(x_1)]=0$ indifferente

1.2)

dominanza stocastica di prim'ordine:

$$F(x_1) \begin{cases} 0 & x<6 \\ 1/6 & 6 \leq x < 16 \\ 1 & x \geq 16 \end{cases} \qquad F(x_2) \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/3 & 0 \leq x < 6 \\ 2/3 & 6 \leq x < 40 \\ 1 & x \geq 40 \end{cases}$$



X_1 non domina stocasticamente X_2

tra 16 e 40 F(xi)>F(x2)

es.: x = 20 in $F(x_1) = 1$

in $F(x_2) = 2/3$

2) $\varphi(E)y(x) = 0$

2.1) $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

Equazione alle differenze lineari, a coefficienti costanti, omogenea:

formula generale: $\varphi(E) = a_n E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \dots + a_1 E^1 + a_0 E^0 = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

ns. caso: $\varphi(E) = a_0 E^0\, y(x) + a_1 E^1\, y(x) + \dots + a_n E^n\, y(x) = 0$

Equazione (polinomio) caratteristica associata all'equazione:

formula generale: $\varphi(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r^1 + a_0 r^0 = \sum_{s=0}^{n} a_S r^S$

ns. caso: $\varphi(E)\, r^x = r^x\, \varphi(r)$

se: $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

allora sostituendo: $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S\, r^x = \quad \sum_{s=0}^{n} a_S r^S\, r^x =$

$= r^x \sum_{s=0}^{n} a_S r^S = r^x\, \varphi(r)$

2.2)

$y(x+2) - 25y(x) = 5^x$

$r^2 - 25 = 0$ $\quad r1,2 = \pm 5$

$y^* = C_1(5)^x + C_2(-5)^x$

$\overline{y} = A_1 \bullet 5^x$

$A_1 5^{x+2} - 25A_1 5^x = 5^x$

$25A_1 5^x - 25A_1 5^x = 5^x$ $\quad$ NO: $0 = 5^x$ Riprovo col metodo della forza bruta: aggiungo x

$\overline{y} = A_1 \bullet 5^x \bullet x$

$A_1 5^{x+2} \bullet (x+2) - 25A_1 5^x = 5^x$

$\cancel{25xA_1 5^x} + 50A_1 5^x -- \cancel{25xA_1 5^x} = 5^x$

$50A_1 = 1 \rightarrow A_1 = 1/50$

$\overline{y}(x) = 1/50 \bullet 5^x \bullet x$

$y(x) = C_1(5)^x + C_2(-5)^x + 1/50x \bullet 5^x$ $\quad$ Sol.Gen.

3') Ipotesi di Ito:

Processo stocastico $\{x(t), t \in T\}$ dove $T = [0, T^*]$ oppure $T = [0, +\infty)$

Eq. Differenziale stocastica di Ito

$dx(t) = \varphi(x(t), t)dt + g(x(t), t)dWt$

L'incremento dx(t) è la somma di:

un termine determistico (dato dal prodotto di una funzione x(t) per l'incremento di tempo dt)

+ un termine stocastico (prodotto di una funzione x(t) per l'incremento di Wiener).

Integrando i due termini troviamo l'integrale di Rieman o Lebesgue + l'integrale di Wiener:

Con media = 0 e varianza = t, integro tra 0 e t:

$x(t) = x(0) + \int_0^t \varphi(x(t),t)dt + \int_0^t g(x(t), t)dW(t)$

$u: R \times T \rightarrow R$ $\quad$ processo stocastico: $\quad y(t) = u(x(t), t)$

con u funzione continua, dotata di derivate (prima e seconda) parziali continue.

con derivata prima continua rispetto alla seconda variabile (che "solitamente" è il tempo t).

Lemma di Ito:

$dy(t) = du(x(t),t) = [u'_1(x(t),t)\ \varphi(x(t), t) + u'_2(x(t), t) + 1/2\, u''_{11}(x(t), t)\, (g(x(t), t)^2]dt +$

$+ u'1(x(t), t)\, g(x(t), t)dW(t).$

3")

$y(t) = 7t^2 \bullet e^{W(t)}$ con $\sigma = 1,\ t > 0$

Poiché abbiamo il processo e NON il diff.stoc. ("non ho la g"), poniamo:

$dW(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t)$

$\varphi = 0$ $g = \sigma = 1$

y'_1 = derivata prima del processo rispetto a W (attenzione: non rispetto a t):

$y'_1 = 7t^2 \bullet e^{W(t)}$

$y''_{11} = 7t^2 \bullet e^{W(t)}$ (rimane inalterato perché è una costante moltiplicativa)

$y'_2 = 14t \bullet e^{W(t)}$ (è l'unica che derivo rispetto al tempo t)

formula generale del lemma di Ito:

$dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\, g\, dW(t)$

sostituisco le derivate:

$dy(t) = [14t \bullet e^{W(t)} + 1/2 \bullet 7t^2 \bullet e^{W(t)}]dt + 7t^2 \bullet e^{W(t)} \bullet 1\, dW(t)$

sostituisco: $y(t) = 7t^2 \bullet e^{W(t)}$

Per togliere t^2 divido per t:

Oppure sostituisco dal testo:

$e^{W(t)} = y(t) / 7t^2$

$dy(t) = [14t \bullet y(t)/7t^2 + 7/2\, t^2 \bullet y(t)/7t^2]dt +$

$+ 7t^2 \bullet y(t)/7t^2\, dW(t)$

Così è più facile semplificare:

$dy(t) = [14\cancel{t} \bullet y(t)/7t^{\cancel{2}} + \cancel{7}/2\, \cancel{t}^{\cancel{2}} \bullet y(t)/\cancel{7t}^{\cancel{2}}]dt +$

$+ \cancel{7t}^{\cancel{2}} \bullet y(t)/\cancel{7t}^{\cancel{2}}\, dW(t)$

Risultato finale:

$dy(t) = [\, 2y(t) / t + 1/2\, y(t)]dt + y(t)\, dW(t)$

STRUMENTI MATEMATICI PER L'ECONOMIA
2008

1)
1') Si consideri un assicuratore (B) che possiede la ricchezza $w^* \geq 0$ e deve decidere se, ricevendo un premio Π, non è per lui sfavorevole offrire l'assicurazione del rischio

$$\Phi : \begin{cases} -\lambda & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$

(cioè se non è sfavorevole accollarsi il rischio di dover sborsare λ con probabilità p), $0<p<1$.
Si chiede di:
a) scrivere le due situazioni Y_1 e Y_2 rispettivamente che egli deve confrontare;
b) determinare il minimo premio P che è disposto ad accettare nell'ipotesi che utilizzi il criterio del valor medio;
c) scrivere l'equazione che deve soddisfare il minimo premio Π_B che B è disposto ad accettare nell'ipotesi che utilizzi il criterio dell'utilità attesa, essendo û la sua funzione di utilità.
1') Determinare l'utilità attesa di

$$X : \begin{cases} 30 & \frac{1}{6} \\ 60 & \frac{5}{6} \end{cases}$$

essendo data la funzione di utilità $u(x) = \ln(x+1)$, $x>0$.

2)
2') Dare la definizione di:
equazione alle differenze finite lineare, a coefficienti costanti, di ordine n, <u>completa.</u>

2") Trovare la soluzione generale della seguente equazione alle differenze finite:

$$y(x+2) - 8y(x) - 9y(x) = 288.(9)^x \quad , \quad x=0,1,.........$$

Trovare poi la soluzione particolare tale che $y(0)=1$.

3)

3') Sia $\{W(t), t\in [0,\infty[\}$ un processo stocastico. Enunciare le 4 proprietà che esso deve soddisfare per essere un processo di Wiener.
Spiegare il significato di almeno una delle proprietà suddette.

3'') Enunciare il lemma di Ito precisando le ipotesi che devono essere soddisfatte.
Posto $dx(t) = 5dt + 2dW(t)$, trovare il differenziale stocastico di $y(t) = -7t + e^{3x(t)}$.

1)

Assicuratore B, ricchezza $w^* \geq 0$, premio Π, rischio Φ, premio min = P

$$\Phi: \begin{cases} -\lambda; \; p \\ 0; \; 1-p \end{cases} \quad \text{con } 0 < p < 1$$

a) $Y_1 = w^*$ non assicuro

$$Y_2 = \begin{cases} w^* + \Pi - \lambda & p \rightarrow \text{assicuro ma ho il danno} \\ w^* + \Pi & 1 - p \rightarrow \text{assicuro senza danno} \end{cases}$$

b) se utilizzo il metodo del valor medio $\rightarrow$ P = ?

$E[Y_1] = w^*$

$E[Y_2] = (w^* + \Pi - \lambda) \bullet p + (w^* + \Pi)(1 - p) =$

$= w^* + P - \lambda p$

per assicurare devo ottenere $E[Y_2] > E[Y_1]$:

$w^* + \Pi - \lambda p > w^*$

$\Pi > \lambda p$

c) se utilizzo il metodo dell'utilità attesa:

$E[u(Y_1)] = u \bullet w^*$

$$E[u(Y_2)] = \begin{cases} u(w^* + \Pi - \lambda) & p \\ u(w^* + \Pi) & 1 - p \end{cases}$$

$E[u(Y_2)] > E[u(Y_1)]$

$u(w^* + \Pi - \lambda) \bullet p + u(w^* + \Pi)(1 - p) > u \bullet w^*$

$upw^* + up\Pi - up\lambda + (uw^* + u\Pi)(1 - p) > u \bullet w^*$

$\cancel{upw^*} + \cancel{up\Pi} - up\lambda + \cancel{uw^*} - \cancel{upw^*} + \cancel{u}\Pi - \cancel{upP} > \cancel{u \bullet w^*}$

$\Pi_B > p\lambda$

$\Pi_B < \Pi_{precedente}$

accetterà un Π^* tale che:

$\Pi_B < \Pi^* < \Pi_S \rightarrow \Pi^* = \lambda p + \theta$

Se fosse l'assicurato:

a) $X_1 = w - \Pi \rightarrow$ si assicura

$$X_2 = \begin{cases} w - \lambda & p \\ w & 1 - p \end{cases} \quad \text{non si assicura}$$

b) se utilizzo il metodo del v.m. $\rightarrow$ P = ?

$E[X_1] = w - \Pi$

$E[X_2] = (w - \lambda) \bullet p + w(1 - p) =$

$= w - \lambda p$

Si assicura se $E[X_1] > E[X_2]$:

$w - \Pi > \omega - \lambda p$

$\Pi < \lambda p$ Premio<Prob. di perdere

c) se utilizzo il metodo dell'utilità attesa:

$E[u(X_1)] = u(w - \Pi) \rightarrow$ si assicura

$$E[u(X_2)] = \begin{cases} u(w - \Pi) & p \\ u(w) & 1 - p \end{cases}$$

$E[u(X_1)] > E[u(X_2)]$

$u(w - \Pi) > u(w - \Pi) \bullet p + u \bullet w(1 - p)$

...

...

$-u\Pi > -up\lambda$

$\Pi_S > \Pi \rightarrow$ pago un premio soglia >

accetterà un Π tale che:

$\lambda p < \Pi < \Pi_S$

($\Pi_{B\,=}$ premio dell'assicuratore

$\Pi^*_{=}$ premio "concordato"

$\Pi_{B\,=}$ premio max che pagherebbe l'assicurato)

θ = caricamento

Questa formula viene soddisfatta perché il capitale posseduto dall'assicuratore è maggiore di quello posseduto dall'assicurando e fa sì che l'assicuratore, benché avverso al rischio, abbia un'avversione minore di quella dell'assicurando.

1.1)

Determinare l'utilità attesa di:

$$X: \begin{cases} 30 & 1/6 \\ 60 & 5/6 \end{cases}$$

Funzione di utilità: $u(x) = \ln(x+1)$, con $x > 0$

$E[u(x)] = \ln(31) \bullet 1/6 + \ln(61) \bullet 5/6 = 3{,}998$

2)

Dare la definizione di eq. Alle differenze finite, lineare, a coeff. Costanti, di ordin n, completa

- eq. Alle diff. Finite: relazione che lega la variabile indipendente x ad una funzione y che è funzione di x: $y = f(x)$

- ordine: differenza tra il massimo e il minimo esponente dell'operatore E che compare nella funzione. n: $E^n y(x)$ Esempi:

Se $y = f(x+2) + f(x+1) + f(x) \rightarrow$ ordine = 2

Se $y = f(x+1) + f(x) \rightarrow$ ordine = 1

eq. Lineare a coeff. Cost. con termine noto:

$a_1y(x+1) + a_0y(x) + c = 0$ con a_1 e a_0 = coeff. cost. $\neq 0$

Divido per a_1:

$-B = c/a_1$ $-A = a_0/a_1$

$$y(x): \begin{cases} A^{x-a}\, y(a) + B\,(1 - A^{x-a})/(1 - A) & A \neq 1 \\ y(a) + B(x - a) & A = 1 \end{cases}$$

- completa: $y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x)$

$y(E) = \Sigma_{s=0}{}^{n} a_S E^S$ $y(E)\ \bar{y}(x) = g(x)$ con $g(x) \neq 0$

$y(E)y^*(x) = 0 \rightarrow$ eq. Omo. Associata

$y(E)\bar{y}(x) = g(x) \rightarrow$ soluzione particolare

$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x) \rightarrow$ soluzione generale dell'eq. Completa

2")

$y(x + 2) + 8y(x + 1) - 9y(x) = 288 \bullet 9^x$ con x = 0,1,…

Trovare la soluzione particolare tale che y(0) = 1

$r^2 + 8r - 9 = 0$ $r_{1,2} = -8 \pm \sqrt{(64+36)}/2 = 1, -9$

$y^* = C_1 1^x + C_2(-9)^x$

$\bar{y} = A_1 \bullet 9^x$

$A_1 \bullet 9^{x+2} + 8A_1 9^{x+1} - 9A_1 9^x = 288 \bullet 9^x$

$\cancel{9}^x[81A_1 + 72A_1 - 9A_1] = 288 \bullet \cancel{9}^x$

$144A_1 = 288 \rightarrow A_1 = 2$

$\bar{y} = 2 \bullet 9^x$

$y(x) = C_1 1^x + C_2(-9)^x + 2 \bullet 9^x$

Se y(0) = 1

$C_1(1)^0 + C_2(-9)^0 + 2 \bullet 9^0 = 1$

$C_1 = -C_2 - 1$

$y(x) = (-C_2 - 1)(1)^x + C_2(-9)^x + 2 \bullet 9^x$

3') $\{W(t), t \in |0,+\infty|\}$ = processo stocastico

Enunciare le 4 proprietà Wiener e spiegarne 1

1. $W_0 = 0$ con probabilità = 1

Il processo inizia sicuramente dalla posizione 0.

2. Tempo: $t_0, t_1, \ldots$

$Wt_1 - Wt_0, Wt_2 - Wt_1, \ldots, Wt_n - Wt_{n-1}$

Spiegazione: gli incrementi sono indipendenti e, secondo la proprietà di Markov, ciò si riflette in una mancanza di memoria.

3. $Wt - Ws \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

La variabile aleatoria "incremento" Wt - Ws è distribuita normalmente con media = 0 e varianza $\sigma^2(t\text{-}s)$ e la funzione di probabilità $F(x) = [x_2 - x_0 \leq x]$ implica che la varianza cresce più della media.

4. è un processo a traiettorie continue: gli incrementi sono stazionari perché la probabilità dipende da t - s e non da "t" ed "s" presi separatamente, con $[Ws, Wz] = 0 + \sigma^2_s$

3")

Eq. Differenziale stocastica di Ito

$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dWt$

$u: R \times T \to R$ processo stocastico: $y(t) = u(x(t), t)$

con u funzione continua, dotata di derivate (prima e seconda) parziali continue.

con derivata prima continua rispetto alla seconda variabile (che "solitamente" è il tempo t).

Lemma di Ito:

$dy(t) = du(x(t),t) = [u'_1(x(t),t)\ \varphi(x(t), t) + u'_2(x(t), t) + 1/2\ u''_{11}(x(t), t)\ (g(x(t), t)^2]dt +$

$+ u'1(x(t), t)\ g(x(t), t)dW(t)$.

Esercizio:

$dx(t) = 5dt - 2dW(t)$ diff.stoc.: $y(t) = e^{3x(t)} -7t$

$\varphi = 5$ $g = -2$

y'_1 = derivata prima del diff.stoc. rispetto alla x

$y'_1 = 3e3^{x(t)}$

$y''_{11} = 9e3^{x(t)}$

$y'_2 = -7$

formula generale del lemma di Ito:

$dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\ g\ dW(t)$

sostituisco le derivate:

$dy(t) = [3e^{3x(t)} \bullet 5 + (-7) + 1/2 \bullet 4 \bullet 9e^{3x(t)}]dt + 3e^{3x(t)} \bullet (-2)\ dW(t)$

$dy(t) = [15e^{3x(t)} -7 + 18e^{3x(t)}]dt -6e^{3x(t)}\ dW(t)$

$dy(t) = [33e^{3x(t)} -7]dt -6e^{3x(t)}\ dW(t)$

Ricalcolo il differenziale stocastico come segue (per poi sostituirlo):

$y(t) = e^{3x(t)} -7t \longrightarrow e^{3x(t)} = y(t) +7t$

Sostituisco in dy(t):

$dy(t) = [33y(t) + 231t -7]dt - [6y(t) + 42t]dW(t)$

STRUMENTI MATEMATICI PER L'ECONOMIA
Appello autunnale 2009.10
9.9.2010

1)

1.1) Devo confrontare le grandezze aleatorie (variabili aleatorie) X_i e X_j, $i \neq j$. Scrivere come li confronto se utilizzo rispettivamente:

1.1.a) il criterio del valor medio, 1.1.b) il criterio dell'utilità attesa.

1.2) Sono date le seguenti grandezze aleatorie(variabili aleatorie):

$$X_1 \begin{cases} 6 & \frac{1}{6} \\ 16 & \frac{5}{6} \end{cases} \quad ; \qquad X_2 \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} \\ 6 & \frac{1}{3} \\ 40 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

confrontarle utilizzando il citerio dell'utilità attesa essendo data la funzione di utilità così definita: $u(x)= \ln(x+1)$.

2) Sia $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_s E^s$, a_s costanti, (E operatore spostamento).

2.1) Si consideri l'equazione

(**) $\varphi(E)y(x) = 0$, $x=1,2,3,..$

e si dimostri che se r_1 è soluzione dell'equazione $\varphi(r)=0$, allora $y_1(x)=c(r_1)^x$, c costante, è soluzione dell'equazione (**) sopra considerata.

2.2) Trovare la soluzione generale della seguente equazione alle differenze finite:

$$y(x+2) + y(x+1) - 6y(x)= 0 \ , \ x=1,2,3,..$$

3)

3.1) Sia dato lo spazio misurabile $(\Omega,\mathcal{A})$ e sia data una funzione d'insieme μ definita su $\mathcal{A}$ la quale associa ad ogni elemento di $\mathcal{A}$ un numero reale.

Dire di quali proprietà deve godere μ per essere una misura.

Sempre con riferimento allo spazio misurabile $(\Omega,\mathcal{A})$, possiamo definire uno speciale tipo di misura: la probabilità P.

Dire di quale proprietà "in più" gode P.

Dimostrare che $0 \leq p(A) \leq 1$ per ogni $A \in \mathcal{A}$

3.2) Dato il differenziale stocastico

$$(°) \qquad dx(t)=3tx(t)dt+7tx(t)dW(t), \quad x(t)>0$$

determinare, utilizzando il Lemma di Itô, il differenziale stocastico di $y(t) = \ln x(t)$.

1)

Si devono confrontare 2 variabili aleatorie. Dire come si procede per il confronto se si utilizza:

a) Il criterio del valore medio:

Variabile aleatoria discreta

X: x_i p_i

$E[x]=\sum x_i \bullet p_i$

Funzione di probabilità

X: x_i p_i

$E[x]=\int_a^b f(x)x_i\, dx$

Funzione di ripartizione F(A)

se derivabile: $F(A)\rightarrow F'(x)= f(x)\rightarrow E[x]=\int_a^b f(x)\, dx$

se non derivabile: $F(A)\rightarrow\int_a^b d\, F(x)\rightarrow E[x]=\int_a^b dF(x)=1$

Confronto:

$E[x]_1>E[x]_2$ conviene x_1

$E[x]_1<E[x]_2$ conviene x2

$E[x]_1=E[x]_2$ indifferente

Qualora si abbia una sola x si confronta con l'operatore nullo 0

$E[x]_1>0$ eseguo

$E[x]_1<0$ non eseguo

$E[x]_1=0$ indifferente

b) Il criterio dell'utilità attesa:

$X_1 \rightarrow u(X_1)$ con funzione u: $R \rightarrow R$

$X_2 \rightarrow u(X_2)$ con u' > 0, u"<0, funzioni continue

Variabile aleatoria discreta

$u(X_i)$: $u(x_i)$ p_i

$E[x]=\sum u(x_i)\bullet p_i$

Funzione di probabilità

u(x): u(x) f(x)

$E[u(x)]=\int_a^b f(x)u(x_i)\, dx$

Confronto:

$E[u(x_1)]>E[x]_2$ conviene x_1

$E[u(x_1)]<E[x]_2$ conviene x_2

$E[u(x_1)]=E[x]_2$ indifferente

$E[u(x_1)]>0$ conviene

$E[u(x_1)]<0$ non conviene

$E[u(x_1)]=0$ indifferente

1.2)

Criterio dell'utilità attesa

$X[u(x_1)]=\ln(7) \bullet 1/6 + \ln(17) \bullet 5/6 = 2{,}6853$ è più conveniente

$X[u(x_1)]=\ln(1) \bullet 1/3 + \ln(7) \bullet 1/3 + \ln(41) \bullet 1/3 = 1{,}88649407192$

2) $\varphi(E)y(x) = 0$

2.1) $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

Equazione alle differenze lineari, a coefficienti costanti, omogenea:

formula generale: $\varphi(E) = a_n E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \ldots + a_1 E^1 + a_0 E^0 = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

ns. caso: $\varphi(E) = a_0 E^0\, y(x) + a_1 E^1\, y(x) + \ldots + a_n E^n\, y(x) = 0$

Equazione (polinomio) caratteristica associata all'equazione:

formula generale: $\varphi(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r^1 + a_0 r^0 = \sum_{s=0}^{n} a_S r^S$

ns. caso: $\varphi(E)\, c\, r^x = c\, r^x\, \varphi(r)$

se: $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S$

allora sostituendo: $\varphi(E) = \sum_{s=0}^{n} a_S E^S c\, r^x = \sum_{s=0}^{n} a_S r^S c\, r^x =$

$= c\, r^x \sum_{s=0}^{n} a_S r^S = c\, r^x\, \varphi(r)$

2.2)

$y(x+2) + y(x+1) - 6yx = 0$ con $x = 1,2,3,\ldots$

$r^2 + r - 6 = 0$ $r_{1,2} = -[1 \pm \sqrt{(1+24)}]/2$ $r_1 = 2$ $r_2 = -3$

$y(x) = C_1(2)^x + C_2(-3)^x$

3.1) (pag.13 testo)

$(\Omega, \tilde{A})$ = spazio misurabile

μ su A associa ad ogni elemento di $\tilde{A}$ un n° reale, con le 3 seguenti proprietà:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Se $A \in \tilde{A} \rightarrow 0 \leq \mu(A) \leq +\infty$
3. Se $A_1, A_2, \ldots \in \tilde{A}$ con $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j \rightarrow$

$$\rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

La proprietà in più di cui gode P è:

$P(A+A^C) = P(A) + P(A^C) = P(A \cup A^C) = P(\Omega) = 1$ quindi:

$P(\Omega) = 1$ con P = probabilità e C = complementare

$P(A+A^C) = P(A) + P(A^C) \geq P(A)$

$\forall A \in \tilde{A} \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

3.2)

$dx(t) = 3tx(t)dt + 7tx(t)dW(t)$ diff.stoc.: $y(t) = \ln x(t)$

$\varphi = 3tx(t)$ $g = 7tx(t)$

$y'_1 = 1/x(t)$ $\longrightarrow$ derivata prima del logaritmo = 1/ argomento del logaritmo

$y''_{11} = -1/x^2$ $\longrightarrow$ derivata della fratta (y'_1)

$y'_2 = 0$ $\longrightarrow$ 0 perché non è del tipo: $y(t) = \ln x(t) + nt$

formula generale del lemma di Ito:

$dy(t) = [y'_1 \bullet \varphi + y'_2 + 1/2g^2 \bullet y''_{11}]dt + y'_1\, g\, dW(t)$

sostituisco le derivate:

$dy(t) = [1/x(t) \bullet 3\tau x(t) + 0 + 1/2 \bullet 49t^2x^2(t) \bullet (-1/x^2)]dt + 1/x(t) \bullet 7tx(t)\, dW(t)$

$dy(t) = [3t\cancel{x(t)}/\cancel{x(t)} - 49t^2\cancel{x^2}/2\cancel{x^2}]dt + 7t\cancel{x(t)}/\cancel{x(t)}\, dW(t)$

$dy(t) = [-49/2t^2 + 3t]dt + 7t\, dW(t)$ finisce qui perché "ho semplificato tutte le x".